Совокупности остатков

1. Натуральное N, большее 1000000, даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 625. Какая цифра может стоять у N в разряде тысяч?

2. Остаток от деления натурального числа n на 2021 на 800 больше, чем остаток от деления числа на 2020. Найдите наименьшее такое n.

3. **(а)** Сумма остатков от деления трёх последовательных натуральных чисел на 2022 — простое число. Докажите, что одно из чисел делится на 2022.
(б) На доске написаны три последовательных нечётных числа. Может ли сумма остатков от деления этих трёх чисел на 2022 равняться некоторому простому числу?

4. Существует ли восьмизначное число без нулевых цифр, которое при делении на свою первую цифру даёт остаток 1, при делении на вторую цифру даёт остаток 2, $\ldots$, при делении на восьмую цифру даёт остаток 8?

5. Найдите все пары натуральных чисел $x \geqslant 2$, $y \geqslant 2$ такие, что остаток от деления числа $3x$ на y равен 1, остаток от деления числа $3y$ на x равен 1 и остаток от деления числа xy на 3 тоже равен 1.

6. По кругу расставлены 100 натуральных чисел. Каждое из них разделили с остатком на следующее по часовой стрелке. Могло ли получиться 100 одинаковых ненулевых остатков?

7. Дмитрий Александрович вычислил остатки при делении одного и того же натурального числа на $2, 3, 4, \ldots, 99, 100$. Среди остатков встретились все числа из набора $\{0, 1, 2, \ldots, 99\}$, за исключением одного ненулевого числа k. Определите наименьшее возможное значение числа k.

8. Некоторое натуральное число a разделили с остатком на числа 1, 2, 3, $\ldots$, 1000. Могло ли так случиться, что среди остатков ровно по 10 раз встретятся числа 0, 1, 2, 3, $\ldots$, 99?

9. Существует ли такое натуральное число n, что неполные частные от деления n на все натуральные числа от 10 до 1000 включительно — это различные нечётные простые числа, а остатки — составные числа (не обязательно различные)? Напомним, что 0 не является составным числом.