

## Радикальные оси.

**Определение.** Радикальная ось - это геометрическое место точек, у которых степени относительно двух данных не концентрических окружностей равны.

**Утверждение.** Радикальная ось двух не концентрических окружностей - прямая.

**Теорема.** Радикальные оси трёх не концентрических окружностей пересекаются в одной точке или параллельны.

1. Докажите, что середины четырёх общих касательных к двум не пересекающимся окружностям лежат на одной прямой.
2. Одна окружность проходит через вершины  $A$  и  $C$  прямоугольника  $ABCD$ , а другая через вершины  $B$  и  $D$ . Докажите, что общая хорда окружностей проходит через центр прямоугольника.
3. На окружности  $s$  с диаметром  $AB$  взята точка  $C$ , из точки  $C$  опущен перпендикуляр  $CH$  на прямую  $AB$ . Докажите, что общая хорда окружности  $s$  и окружности  $s_1$  с центром  $C$  и радиусом  $CH$  делит отрезок  $CH$  пополам.
4. В четырёхугольнике  $ABCD$  углы  $A$  и  $C$  — прямые. На сторонах  $AB$  и  $CD$  как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что прямая  $XY$  проходит через середину диагонали  $AC$ .
5. Касательные к описанной окружности  $\Omega$  треугольника  $ABC$  в точках  $A$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ . Прямая, проходящая через  $P$  и параллельная  $AC$ , пересекает прямую  $AB$  в точке  $Q$ . Точка  $M$  — середина  $AQ$ . Докажите, что длина касательной из  $M$  к  $\Omega$  равна  $PM$ .
6. Дана неравносторонняя трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Окружность, проходящая через точки  $B$  и  $C$ , пересекает боковые стороны трапеции в точках  $M$  и  $N$ , а диагонали — в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что прямые  $XY$ ,  $MN$  и  $AD$  пересекаются в одной точке.
7. В треугольнике  $ABC$  провели биссектрису  $AD$ . Затем построили окружность  $\omega$ , проходящую через точки  $A$  и  $D$  и касающуюся прямой  $BC$ . Пусть  $E$  — вторая точка пересечения  $\omega$  и  $AB$ , а  $F$  — точка пересечения  $\omega$  и  $EC$ . Докажите, что прямая  $AF$  делит отрезок  $DC$  пополам.
8. Пусть  $AA_1$  и  $BB_1$  — высоты остроугольного неравностороннего треугольника  $ABC$ . Известно, что отрезок  $A_1B_1$  пересекает среднюю линию, параллельную  $AB$ , в точке  $C'$ . Докажите, что отрезок  $CC'$  перпендикулярен прямой, проходящей через точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника  $ABC$ .