

Радикальные оси.

Определение. Радикальная ось - это геометрическое место точек, у которых степени относительно двух данных не концентрических окружностей равны.

Утверждение. Радикальная ось двух не концентрических окружностей - прямая.

Теорема. Радикальные оси трёх не концентрических окружностей пересекаются в одной точке или параллельны.

1. Докажите, что середины четырёх общих касательных к двум не пересекающимся окружностям лежат на одной прямой.
2. Одна окружность проходит через вершины A и C прямоугольника $ABCD$, а другая через вершины B и D . Докажите, что общая хорда окружностей проходит через центр прямоугольника.
3. На окружности s с диаметром AB взята точка C , из точки C опущен перпендикуляр CH на прямую AB . Докажите, что общая хорда окружности s и окружности s_1 с центром C и радиусом CH делит отрезок CH пополам.
4. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C – прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y . Докажите, что прямая XY проходит через середину диагонали AC .
5. Касательные к описанной окружности Ω треугольника ABC в точках A и C пересекаются в точке P . Прямая, проходящая через P и параллельная AC , пересекает прямую AB в точке Q . Точка M – середина AQ . Докажите, что длина касательной из M к Ω равна PM .
6. Данна неравнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Окружность, проходящая через точки B и C , пересекает боковые стороны трапеции в точках M и N , а диагонали – в точках X и Y . Докажите, что прямые XY , MN и AD пересекаются в одной точке.
7. В треугольнике ABC провели биссектрису AD . Затем построили окружность ω , проходящую через точки A и D и касающуюся прямой BC . Пусть E – вторая точка пересечения ω и AB , а F – точка пересечения ω и EC . Докажите, что прямая AF делит отрезок DC пополам.
8. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC . Известно, что отрезок A_1B_1 пересекает среднюю линию, параллельную AB , в точке C' . Докажите, что отрезок CC' перпендикулярен прямой, проходящей через точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника ABC .