Степень вхождения.

Определение. Если натуральное число n кратно p^{α}, но не кратно $p^{\alpha+1}$, то $\alpha = \nu_p(n)$ — *степень вхождения* простого p в разложение n на простые.

Свойства степеней вхождения:

- Натуральное число n кратно натуральному числу m тогда и только тогда, когда для любого простого p выполнено $\nu_p(n) \geqslant \nu_p(m)$.
- $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$
- натуральное число n является точной k-ой степенью тогда и только тогда, когда для любого простого p выполнено $\nu_p(n) \,\vdots\, k$.
- $\nu_p(a \pm b) \geqslant \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$, если $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, то достигается равенство

0. **(а)** Взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab = ac + bc$. Докажите, что abc — точный квадрат.
(б) $y^2z + yz^2 = x^3 + x^2z - 2xz^2$, где x, y, z — взаимно простые в совокупности целые числа. Докажите, что z является кубом целого числа.

1. Вася выписал на доске 2025 чисел, меньших, чем 2025-е по счёту простое число. Докажите, что какое-то из выписанных чисел является делителем произведения остальных 2024.

2. Натуральные числа a и b и натуральное $n > 1$ таковы, что число $\frac{a^n}{b} + \frac{b^n}{a}$ целое. Докажите, что обе дроби целые.

3. Про натуральные числа m, n известно, что $m^7 + n^7 + m$ делится на mn. Докажите, что m - точная седьмая степень натурального числа.

4. Натуральные числа a, b, c таковы, что число $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ является целым. Верно ли, что abc — точный куб?

5. Докажите, что не существует трёх различных натуральных чисел, каждое из которых равно наименьшему общему кратному своих разностей с двумя другими.

6. $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Докажите, что $x - y$ точный квадрат.

7. Докажите что для любого k, существует такое n и p - простое число, что
(а) $\nu_p(n!) = k$;
(б) $\nu_p(C_{2n}^n) = k$.
Для каких фиксированных p для любого k можно найти такое n?

8. d — общий нечётный делитель чисел $C_{n+1}^n, C_{n+2}^n, \ldots, C_{2n}^n$. Докажите, что $2^n - 1 \,\vdots\, d$.