

## Комбинаторная геометрия

0. (а) В некоторой стране 2025 аэродромов, все расстояния между ними различны. С каждого поднимается самолет и летит на ближайший к нему аэродром. Докажите, что никуда не может прилететь больше пяти самолетов.
- (б) На большой площади собралось несколько человек. Оказалось, что все попарные расстояния между ними различны. Каждый упорядочил для себя всех остальных в порядке от ближайшего до самого дальнего от себя, и послал сообщение  $k$ -му по счету человеку в этом списке. Какое наибольшее количество сообщений могло прийти одному и тому же человеку?
1. На плоскости даны четыре точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что хотя бы один из треугольников с вершинами в этих точках не является остроугольным.
2. Можно ли расположить на столе несколько монет (необязательно одинаковых) так, чтобы каждая касалась ровно шести других?
3. Шесть кругов расположены на плоскости так, что некоторая точка  $O$  лежит внутри каждого из них. Докажите, что один из этих кругов содержит центр некоторого другого.
4. Существует ли выпуклый пятиугольник  $ABCDE$ , у которого все углы  $ABD$ ,  $BCE$ ,  $CDA$ ,  $DEB$ ,  $EAC$  – тупые?
5. На плоскости отмечено  $n \geq 3$  точек. Докажите, что можно обозначить эти точки как  $X_1, X_2, \dots, X_n$  так, что  $\angle X_{i-1}X_iX_{i+1} < 90^\circ$ .
6. На плоскости отмечено 2025 точек общего положения (т.е. никакие три не лежат на одной прямой). Докажите, что можно выбрать три отмеченные точки  $A, B, C$  так, чтобы для любой точки  $D$  из оставшихся 2022 отмеченных точек, прямые  $AD$  и  $CD$  не содержали бы точек, лежащих внутри треугольника  $ABC$ .
7. (а) На плоскости дано  $n \geq 3$  точек, причем не все они лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек.
- (б) Докажите, что у любого выпуклого  $n$ -угольника можно выбрать 3 вершины так, чтобы весь многоугольник целиком лежал внутри окружности, описанной около выбранного треугольника.