Ещё подобие.

1. **(а)** Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Докажите, что $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.
(б) Из точки M вне окружности проведены две секущие. Первая пересекает окружность в точках A, B, а вторая — в точках C, D. Докажите, что $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.
(в) Через точку M вне окружности проведены две прямые. Первая пересекает окружность в точках A, B, а вторая касается окружности в точке C. Докажите, что $MA \cdot MB = MC^2$.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, и $\angle BAC = \angle CBD, \angle BCA = \angle CDB$. Докажите, что отрезки касательных из точек B и C, проведенные к описанной окружности треугольника AOD, равны.

3. Для сторон треугольника ABC выполняется соотношение $BC^2 = AC^2 + AC \cdot AB$. Докажите, что $\angle A = 2\angle B$.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Докажите, что $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$

5. **Теорема Птолемея.** Четырехугольник $ABCD$ вписан. Докажите, что $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.
Подсказка. Отметьете на диагонали AC точку X так, что $\angle ABX = \angle CBD$.

6. Правильный семиугольник $ABCDEFG$ вписан в окружность. Докажите, что $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$.

7. **Неравенство Птолемея**. Докажите, что в произвольном четырехугольнике $ABCD$ верно неравенство $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$. В каких случаях неравенство превращается в равенство?

8. Окружности Ω и ω касаются друг друга внутренним образом в точке A. Проведем в большей окружности Ω хорду CD, касающуюся ω в точке B (хорда AB не является диаметром ω). Точка M — середина отрезка AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника CMD, проходит через центр ω.