

Квадратные трёхчлены

Определение.

Квадратным трёхчленом называется выражение вида $ax^2 + bx + c$, где a, b, c – коэффициенты, x – переменная.

Дискриминантом квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ называется число

$$D = b^2 - 4ac.$$

Корнями квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ называются решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Формула корней. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет следующие корни:

- Если $D < 0$, то решений нет;
- Если $D = 0$, то решение одно: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, и трёхчлен раскладывается на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$;
- Если $D > 0$, то решений два: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, и трёхчлен раскладывается на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Теорема Виета. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Тогда $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

1. Числа 2468 и 8642 – корни квадратного трёхчлена $4x^2 + bx + c$. Найдите корни трёхчлена $x^2 + bx + 4c$.
2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Известно, что для различных чисел a, b, c верно равенство: $f(a + c) - f(a) = f(b + c) - f(b)$. Маша взяла различные числа d, e , и сказала, что $f(d + c) - f(d) = f(e + c) - f(e) + 2025$. Может ли она говорить правду?
3. Докажите, что если $c(a + b + c) < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет действительный корень.
4. Известно что у квадратного трёхчлена $x^2 + ax + b + 1$ имеется два натуральных корня. Докажите что число $a^2 + b^2$ является составным.
5. $f(x), g(x)$ – два приведённых квадратных трёхчлена. Их произведение имеет 4 действительных корня и выполняются равенства

$$g(1) = f(2), g(2) = f(1).$$

Найдите сумму всех 4 корней этих трёхчленов.

6. Даны три приведённых квадратных трёхчлена с дискриминантами 25, 49 и 144. Всегда ли получится разбить шесть корней этих трёхчленов на две группы с равными суммами?
7. Алиса взяла 2024 различных целых числа $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ и перемножила квадратные трёхчлены $x^2 - a_i x + b_i$, получился многочлен $P(x)$. Боб взял

другие 2024 различных целых числа $c_1, d_1, c_2, d_2 \dots$ и также перемножил квадратные трёхчлены $x^2 - c_i x + d_i$, получился многочлен $Q(x)$. Может ли быть такое что $P(x) = Q(x)$?

8. Учитель написал на доске квадратное уравнение $x^2 + 1111x + 2222$, после чего каждый из учеников по очереди увеличивал или уменьшал на единицу либо коэффициент при x , либо слагаемое без x . В результате на доске оказалось написано уравнение $x^2 + 2222x + 1111$. Верно ли, что в некоторый момент на доске было написано уравнение с целыми корнями?
9. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$ с действительными коэффициентами. Нашлась такая пара целых чисел x_1, x_2 , что $f(x_1) - f(x_2)$ - квадрат натурального числа. Докажите, что найдется бесконечно много пар целых чисел k_1, k_2 , для каждой из которых $f(k_1) - f(k_2)$ - квадрат натурального числа.