По мотивам УрТЮМа

1. При каких натуральных n можно выбрать четыре различных числа a, b, c, d из множества $\{n, n+1, ..., n^2\}$ так, что $ab = cd$?

2. На доске написано число 23456789123456789123456789123456789. Двое по очереди вычеркивают цифры. Проигрывает тот игрок, после хода которого либо не осталось цифр, либо число, образованное оставшимися цифрами, делится на 3. Кто из игроков может гарантировать себе победу (начинающий или второй игрок)?

3. На стороне AB четырёхугольника $ABCD$ с углами $\angle A = 45°, \angle B = 90°$ и $\angle C = 135°$ нашлась такая точка E, что $BC = AE$. Докажите, что треугольник BDE — равнобедренный.

4. Найдите наибольшее натуральное число n, такое что в любой таблице 2×2024, заполненной числами $1, 2, ..., 4048$, можно выбрать по одному числу в каждом столбце так, чтобы в каждой строке было выбрано 1012 чисел и сумма выбранных чисел была не меньше n.

5. На доске написаны по одному разу все натуральные числа от 2 до 2025. Каждую минуту Вася выбирает на доске какие-нибудь два числа x и y, стирает их, а вместо них пишет число $\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$. Какое число останется на доске через 2023 минуты? (Найдите все возможные значения.)

6. Дан граф G на n вершинах и натуральное число $k < n$. В графе G заданы направления ребер так, что для любого набора A из k вершин этого графа можно найти вершину $v \notin A$, которая соединена ребрами со всеми вершинами из A, и эти ребра направлены от v к A. Докажите, что $n \geq 2^{k+1} - 1$.

7. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P, на отрезке PC — точка Q, на отрезке AP — точка R, а на отрезке DQ — точка S, причем $BR \| DQ$ и $AP \| CS$. На стороне AD выбрана точка T так, что $\angle ATR = \angle DTS$. Докажите, что $PS + QR > RT + TS$.

8. Дано натуральное $b > 2$. Оказалось, что существует натуральное n, такое что число $n^2 + 1$ можно представить в виде суммы слагаемых вида $b^k - 1$ с натуральными k, использовав каждое слагаемое не более $b - 1$ раз. Докажите, что таких n бесконечно много.