

Эйлеровский разнбой

1. Учитель написал на доске 10 отрицательных целых чисел. Вася переписал в тетрадь эти числа, затем записал туда же всевозможные их попарные произведения, всевозможные произведения трёх, четырёх, ..., девяти из этих чисел и, наконец, произведение всех десяти чисел. Оказалось, что сумма всех записанных Васей чисел отрицательна. Чему она могла быть равна?
2. Можно ли разбить числа от 1 до 100 на три группы таким образом, чтобы в первой группе сумма чисел делилась на 102, во второй группе – на 203, а в третьей группе – на 304?
3. Петя отмечает на плоскости четыре точки так, чтобы их все нельзя было зачеркнуть двумя параллельными прямыми. Из прямых, проходящих через пары точек, Вася выбирает две, измеряет угол между ними и платит Пете сумму, равную градусной мере угла. Какую наибольшую сумму может гарантировать себе Петя?
4. Шестизначное число N совпадает с каждым из пяти шестизначных чисел A, B, C, D, E в трёх разрядах. Докажите, что среди чисел A, B, C, D, E найдутся два, совпадающие по крайней мере в двух разрядах.
5. Таня и Маша по очереди выписывают на доску натуральные числа, не превосходящие 1000, причем число 13 выписывать нельзя. Начинает Таня. Проигрывает та девочка, после хода которой на доске впервые появятся два одинаковых числа или два числа, отличающиеся на 17. Кто из девочек выиграет при правильной игре, и как ей для этого надо играть?
6. В каждой клетке клетчатой доски размером 50×50 записано по числу. Известно, что каждое число в 3 раза меньше суммы всех чисел, записанных в клетках, соседних с ним по стороне, и в 2 раза меньше суммы всех чисел, записанных в клетках, соседних с ним по диагонали. Докажите, что каждую клетку доски можно покрасить в красный или синий цвет так, что сумма всех чисел, записанных в красных клетках, равна сумме всех чисел, записанных в синих клетках.
7. Числа от 1 до 1000000 разбили на 100000 десятков (то есть групп от $10a + 1$ до $10a + 10$) и в каждом десятке покрасили одно число в красный цвет, а другое в зелёный. Докажите, что можно выбрать несколько (не более 50) красных чисел и столько же зелёных чисел так, чтобы сумма выбранных красных чисел была равна сумме выбранных зелёных.
8. В белой таблице размером 100×100 окрашено в красный цвет $N > 0$ клеток таким образом, что количество красных клеток в любой фигуре,

образованной объединением столбца и строки таблицы, делится на 3. Чему может быть равно N ?