

Простые числа

0. (а) Докажите, что простых чисел бесконечно много.
(б) Докажите, что простых чисел вида $4n + 3$ бесконечно много.
1. Докажите что $n!$ не делится на 2^n .
2. Алиса взяла набор из 2025 подряд идущих чисел и перемножила. После этого она посмотрела на какую максимальную степень числа 2025 делится это произведение и получила X . Она утверждает, что если взять любой другой набор с числами больше и сделать те же действия, то числа X не получится. Может ли Алиса быть права?
3. Может ли сумма квадратов трех простых чисел больших 5 быть простым числом?
4. Найдите все такие тройки простых чисел p, q, r , что $p^2r + p^2q + r^2q + r^2p + q^2p + q^2r$ делится на pqr .
5. Докажите что среди чисел $n + 1, n + 2, \dots, (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)^n$ содержится хотя бы 1 простое число, где $n > 10$.
6. Рассмотрим сумму $1 + p^{1!} + p^{2!} + \dots + p^{(p-2)!}$, где $p > 3$ - простое число. Может ли она деленная на 2 быть простым числом?
7. Пусть a, b - натуральные числа, такие что $a > b \geq 1$. Рассмотрим множество P всех простых делителей чисел вида
 - (а) $a^n - 1$
 - (б) $a^n - b^n$Докажите, что множество P бесконечно.
8. Оля взяла все простые числа от $n + 2$ до $2n + 1$ включительно и перемножила. Докажите что это произведение не больше чем 4^n .