

Выделенные множества

1. Числа от 2 до 100 изначально покрашены в белый цвет. Какое наименьшее количество чисел из этого набора можно покрасить в чёрный цвет так, чтобы любое белое число было делителем или кратным какого-то чёрного?
2. В клетчатом квадрате 9×9 отмечены узлы всех клеток: всего 100 узлов. Какое наименьшее число прямых понадобится, чтобы зачеркнуть все узлы, если запрещено проводить прямые, параллельные сторонам квадрата?
3. Каждая деталь конструктора «Юный паяльщик» — это скобка в виде буквы П, состоящая из трёх единичных отрезков. Можно ли из деталей этого конструктора спаять полный проволочный каркас куба $2 \times 2 \times 2$, разбитого на кубики $1 \times 1 \times 1$? *(Каркас состоит из 27 точек, соединённых единичными отрезками; любые две соседние точки должны быть соединены ровно одним проволочным отрезком.)*
4. Сто гномов, веса которых равны $1, 2, 3, \dots, 100$ фунтов, собрались на левом берегу реки. Плавать они не умеют, но на этом же берегу находится гребная лодка грузоподъёмностью 100 фунтов. Из-за течения плыть обратно трудно, поэтому у каждого гнома хватит сил грести с правого берега на левый не более одного раза (грести в лодке достаточно любому из гномов; гребец в течение одного рейса не меняется). Смогут ли все гномы переправиться на правый берег?

5. Вася и Петя играют в игру на таблице 6×6 . Каждым своим ходом игрок записывает в таблицу рациональное число в пустую клетку так, чтобы все записанные числа были различны. Вася начинает игру, потом они ходят по очереди. Когда таблица будет заполнена, в каждой строке клетка с наибольшим номером приобретает чёрный цвет. Вася выигрывает, если чёрные клетки будут образовывать путь от первой строки таблицы до последней (путь проходит по соседним клеткам, клетки называются соседними если у них есть хотя бы одна общая вершина), иначе Вася проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?
6. В языке племени АУ две буквы — «А» и «У». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не меньше одной и не больше 2025 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.
7. В начале в углу доски 9×9 стоит конь. Гроссмейстеры Магнус и Володя по очереди (начинает Магнус) ходят этим конём. Нельзя ходить на клетку, с которой предыдущим ходом сходил соперник. Докажите, что Володя может играть так, чтобы конь не побывал по крайней мере на 45 клетках.