Метод площадей

0. **(а)** Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, лежащей внутри правильного треугольника, до его сторон не зависит от выбора точки.

(б) Докажите аналогичное утверждение для правильного n-угольника.

1. Внутри треугольника ABC взята точка O. Прямые AO, BO и CO пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что:

(а) $\dfrac{OA_1}{AA_1} + \dfrac{OB_1}{BB_1} + \dfrac{OC_1}{CC_1} = 1$;

(б) $\dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} = 1$ ***(частный случай теоремы Чевы)***.

2. Квадрат со стороной 1 разрезали на прямоугольники. У каждого из получившихся прямоугольников выбрали наименьшую сторону (у квадрата выбрали любую сторону). Докажите, что сумма длин выбранных сторон не меньше 1.

3. На клетчатой плоскости нарисован многоугольник с вершинами в узлах сетки. При этом нет сторон, идущих по линиям сетки. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков сетки, лежащих внутри многоугольника, равна сумме длин горизонтальных отрезков, лежащих внутри него.

4. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O. Через вершину B провели прямую, параллельную стороне CD, а через вершину C — прямую, параллельную стороне AB. Эти прямые пересеклись в точке P, лежащей внутри треугольника AOD. Докажите, что $\angle AOP = \angle DOP$.

---

5. M — середина стороны BC треугольника ABC. Известно, что выполняется соотношение $AB = AC + AM$. Провели Медиану AM, и она пересекает вписанную окружность треугольника в точках P и Q. Найдите угол PIQ, где I — центр вписанной окружности.

6. Числа x, y, z таковы, что $5 \le x,\ y,\ z \le 8$. Найдите наибольшее значение величины

$$2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4.$$