

Две модели

1. По кругу выложены 5 карточек. На каждой написано ненулевое число. Незнайка может узнать **(а)** сумму чисел на любых двух соседних карточках; **(б)** произведение чисел на любых двух карточках. Может ли Незнайка определить, какие числа написаны на карточках?
2. Вася произвольным образом расставил в клетки шахматной доски числа от 1 до 64, а затем сообщил Пете сумму чисел в каждой доминошке. **(а)** Есть ли расстановки, для которых Петя сможет восстановить все числа? **(б)** Всегда ли Петя сможет по полученным данным восстановить исходную расстановку?
3. Учительница написала на доске двузначное число и спросила Диму по очереди, делится ли оно на 2? на 3? на 4? ... на 9? На все восемь вопросов Дима ответил верно, причём ответов «да» и «нет» было поровну.
(а) Можете ли вы гарантированно ответить верно хотя бы на один из вопросов учительницы, не зная самого числа?
(б) А хотя бы на два вопроса?
4. Все виды растений одной страны были занумерованы подряд натуральными числами от 2 до 2026 (числа идут без пропусков и повторений). Для каждой пары видов растений запомнили наибольший общий делитель их номеров, а сами номера были забыты (в результате сбоя компьютера). Можно ли для каждого вида растений восстановить его номер?
5. У Андрюши есть 100 камней разного веса, причем он различает камни по внешнему виду, но не знает, сколько именно весит каждый камень и как они упорядочены по весу. Андрюша может вечером положить на стол ровно 10 камней, а ночью домовой разложит их по возрастанию веса. Но если в доме живёт ещё и барабашка, то под утро он обязательно поменяет какие-то два из разложенных камней местами. Всё это известно Андрюше, но он не знает, есть ли в доме барабашка. Сможет ли он это узнать?
6. Компания состоит из 5 рыцарей и 4 хитрецов, рыцарь всегда говорит правду, а хитрец может сказать как правду, так и ложь. Их собираются посадить за круглый стол и каждого спросить: «Кто Ваш сосед справа — рыцарь или хитрец?» Докажите, что хитрецы могут так сесть за стол и выбрать ответы, что нельзя будет гарантированно указать ни на одного рыцаря в этой компании.

7. При каком наименьшем n с помощью n весов, из которых ровно 10 сломанных, можно за конечное число взвешиваний из 1000 монет определить одну фальшивую?
8. В Средиземье 1000 графств, в одном из которых находится волшебное Кольцо. Раз в день Маг может выбрать любое подмножество графств, и получить от волшебного Камня ответ, есть ли Кольцо в одном из этих графств. Камень может ошибиться, но никогда не ошибается два дня подряд. Маг может совершать данное действие некоторое количество дней, после чего он должен отправить гонцов в некоторые k графств, в одном из которых наверняка находится Кольцо. При каком наименьшем k Маг может это сделать?