

Турниры

Определение. Ориентированный граф, между каждыми двумя вершинами которого проведено ровно одно ориентированное ребро, называется турниром.

Полные ориентированные графы

1. (а) Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь.
(б) Докажите, что в любом сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.
2. Несколько (больше двух) команд провели баскетбольный турнир в один круг. Известно, что нет команды, которая бы выиграла все матчи. Докажите, что найдутся такие команды A, B, C , что A выиграла у B , B выиграла у C , а C — у A .
3. Докажите, что в полном ориентированном графе на $N \geq 7$ вершинах всегда найдётся:
(а) ребро, развернув которое;
(б) вершина, инвертированием всех рёбер в которой; можно добиться того, чтобы граф стал сильно связным.
4. Докажите, что в сильно связном турнире с $n > 4$ вершинами существует:
(а) вершина удалив которую;
(б) хотя бы 2 вершины такие, что при удалении одной из них; сильная связность графа не теряется.

Турниры

5. **Разминка.** Среди n команд провели турнир по волейболу, где каждая команда сыграла с каждой ровно 1 раз, причем известно, что если команда A победила команду B , а команда B победила команду C , то команда A обязательно одержала верх над командой C . (а) Какое максимальное количество поражений могло быть у команды, занявшей первое место? (б) Тот же вопрос, но турнир был по футболу(могли быть ничьи).
6. (а) Назовём *царём* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух. Докажите, что в любом турнире найдётся царь. (б) Докажите, что в турнире не может быть ровно двух царей.
7. Даны $N > 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \dots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего номера к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовём *однотонной*, если нет двух таких точек A и B , что от A до B можно добраться и по красным стрелкам, и по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.
8. **Приехали.** Среди n команд провели турнир по волейболу, где каждая команда сыграла с каждой ровно 1 раз, причём известно для любых команд A и D , если нашлись такие команды B и C , что команда A победила команды B и C , команда B победила команды C и D , а команда C победила команду D , то команда A обязательно одержала верх над командой D . Какое максимальное количество поражений могло быть у команды, занявшей первое место?