

## Принцип Карно

**Принцип Карно.** Даны две различные точки  $A$  и  $B$ , а также число  $c$ . Равенство разности квадратов наклонных к  $AB$  и разности квадратов их проекций приводит к равносильности следующих утверждений:

- на прямой существует ровно одна точка  $X$  такая, что  $AХ^2 - ВХ^2 = c$ ;
- ГМТ  $X$  таких, что  $AХ^2 - ВХ^2 = c$  — прямая, перпендикулярная  $AB$ .

Из принципа следует, что  $AХ^2 - ВХ^2 = AY^2 - BY^2$  равносильно  $AB \perp XY$ .

**Теорема Карно.** Перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1, B_1, C_1$  на стороны  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$ , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда  $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$ .

**Теорема Штейнера.** Если перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1, B_1$  и  $C_1$  на прямые  $BC, AC$  и  $AB$  соответственно, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек  $A, B$  и  $C$  на прямые соответственно  $B_1C_1, A_1C_1$  и  $A_1B_1$ , также пересекаются в одной точке.

1. Даны четыре палочки, из которых можно составить контур четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что из них также можно составить контур четырёхугольника с двумя прямыми углами.
2. В шестиугольнике  $ABCDEF$ : углы  $A$  и  $C$  — прямые,  $AB = BC, CD = DE, EF = FA$ . Докажите, что прямые  $DF$  и  $BE$  перпендикулярны.
3. Точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  таковы, что  $AB_1 = AC_1, BC_1 = BA_1$  и  $CA_1 = CB_1$ . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1, B_1$  и  $C_1$  на прямые  $BC, CA$  и  $AB$ , пересекаются в одной точке.
4. Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — основания высот треугольника  $ABC$ , проведённых из точек  $A, B$  и  $C$  соответственно.  $A_2, B_2, C_2$  — проекции вершин  $A, B, C$  на прямые  $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$  соответственно. Докажите, что прямые  $AA_2, BB_2, CC_2$  пересекаются в одной точке;
5. Через вершины  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  перпендикулярно прямой  $BC$  проведены прямые  $b$  и  $c$  соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам  $AC$  и  $AB$  пересекают прямые  $b$  и  $c$  соответственно в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что прямая  $PQ$  перпендикулярна медиане  $AM$   $\triangle ABC$ .
6.  $H$  — ортоцентр равнобедренного треугольника  $ABC$ . На боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно так, что угол  $KMH$  — прямой. Докажите, что из отрезков  $AK, CM$  и  $MK$  можно составить прямоугольный треугольник.

*Комментарий: В задачах 7-9 решения без принципа Карно не принимаются.*

7. Докажите, что в параллелограмме  $ABCD$  выполнено тождество  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ .
8. Дан четырёхугольник  $ABCD$ , диагонали которого перпендикулярны. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из середин сторон  $AB$  и  $AD$  на соответственно противоположные стороны, пересекаются на прямой  $AC$ .
9. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  такие, что  $\angle CPB = \angle B = \angle AQB$ . Пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ . Перпендикуляр к стороне  $AC$ , восстановленный в точке  $A$ , пересекает луч  $HP$  в точке  $X$ , а перпендикуляр к стороне  $AC$ , восстановленный в точке  $C$ , пересекает луч  $HQ$  в точке  $Y$ . Докажите, что прямая  $XY$  перпендикулярна медиане  $BM$  треугольника  $ABC$ .