Площади

1. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей.

2. В треугольнике ABC стороны относятся как $AB : BC : CA = 2 : 3 : 4$. В нём проведены биссектрисы AK и CL. Найдите отношение $\frac{S_{LBK}}{S_{ABC}}$.

3. **(а)** Дан треугольник ABC. Точка M — середина стороны BC. Верно ли, что если $S_{ABX} = S_{ACX}$, то точка X обязательно лежит на прямой AM?
(б) Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ существует такая точка O, что площади треугольников OAB, OBC, OCD и ODA равны. Докажите, что одна из диагоналей четырёхугольника делит другую пополам.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки E и F — середины сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE, AF, EF делят четырёхугольник на 4 треугольника, площади которых равны последовательным натуральным числам. Каково наибольшее значение площади треугольника ABD?

5. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отметили точки M и N. В треугольниках ABM, MCN и AND провели медианы из вершин B, C и D соответственно. Докажите, что продолжения всех трёх медиан пересекаются в одной точке.

---

6. M — середина стороны BC треугольника ABC. Известно, что выполняется соотношение $AB = AC + AM$. Провели Медиану AM, и она пересекает вписанную окружность треугольника в точках P и Q. Найдите угол PIQ, где I - центр вписанной окружности.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ все углы меньше 150°, причём $\angle A + \angle D = 150^\circ$. Докажите, что $S_{ABCD} > \frac{1}{4}(AB \cdot CD + AB \cdot BC + BC \cdot CD)$.