

Задачи про C -шки

Во всех задачах предполагается, что у C -шек индексы целые неотрицательные и верхний не превосходит нижний.

1. Докажите равенства:

(а) $C_{n-1}^{k-1} \cdot C_n^{k+1} \cdot C_{n+1}^k = C_{n-1}^k \cdot C_{n+1}^{k+1} \cdot C_n^{k-1}$;

(б) $C_r^m \cdot C_m^k = C_r^k \cdot C_{r-k}^{m-k}$;

(в) $C_n^0 \cdot C_n^m + C_n^1 \cdot C_{n-1}^{m-1} + \dots + C_n^m \cdot C_{n-m}^0 = 2^m \cdot C_n^m$;

(г) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$;

(д) $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + \dots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$.

2. Никакие три диагонали выпуклого 2025-угольника не пересекаются в одной точке. Докажите, что количество треугольников, вершины которых лежат внутри многоугольника, а стороны — на его диагоналях, кратно 7.

3. Есть ли такие натуральные числа $k < m < n$, что $\text{НОД}(C_n^k, C_n^m) = 1$?

4. Что больше: количество 2025-значных чисел из единиц и двоек, в которых ровно 1012 единиц, или количество 1010-значных чисел из единиц, двоек и троек (необязательно все виды цифр используются в каждом числе)?

5. Для чётного n докажите равенство

$$\frac{1}{C_n^0} - \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^2} - \frac{1}{C_n^3} + \dots + \frac{1}{C_n^n} = \frac{2n+2}{n+2}.$$

6. d — общий нечётный делитель чисел $C_{n+1}^n, C_{n+2}^n, \dots, C_{2n}^n$. Докажите, что $2^n - 1 \vdots d$.