Векторы: скалярное произведение

1. A, B, C, D — произвольные точки. Докажите, что

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}.$$

2. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка M лежит на диагонали AC, причём $AM : MC = 3 : 1$. Докажите, что $\angle KMD = 90^\circ$.

3. ABC — равносторонний треугольник с центром O. Докажите, что любой точки M верно равенство

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 3 \cdot MO^2.$$

4. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$.

5. В выпуклом четырёхугольнике провели отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон. Он разделил четырёхугольник на два, у каждого из которых равны диагонали. Докажите, что у исходного четырёхугольника также равны диагонали.

---

6. M — середина стороны AD квадрата $ABCD$. Биссектрисы углов AMC и DMC пересекают стороны AB и CD в точках N и K соответственно. Докажите, что отрезок NK равен и перпендикулярен отрезку MC.

7. $ABCDEFGH$ — правильный восьмиугольник. M, N, K — середины отрезков AC, DE и AF соответственно. Докажите, что отрезки MN и CK равны и перпендикулярны.

8. Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC. Докажите, что

$$AB \cdot CD^2 = AD \cdot CB^2 + BD \cdot CA^2 - AD \cdot BD \cdot AB.$$