# Метод Штурма

**Метод Штурма.** Одновременное изменение двух переменных с сохранением параметра (обычно суммы или произведения) так, чтобы при этом модуль разности частей неравенства уменьшался.

**Важные леммы.** Пусть $0 < a < c < d < b$. Тогда

- $ab < cd$, если $a + b = c + d$
- $a^2 + b^2 > c^2 + d^2$, если $a + b = c + d$
- $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{c} + \sqrt{d}$, если $a + b = c + d$
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$, если $a + b = c + d$
- $a + b > c + d$, если $ab = cd$

**Пример.** Докажите методом Штурма неравенство $QM - AM - GM - HM$.

**1.** Докажите, что для любых $x_1, x_2 \ldots, x_n > 0$ с произведением 1 верно неравенство

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \geqslant 2^n$$

**2.** Докажите, что для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ с суммой 1 верны неравенства

**(а)**

$$\frac{(1 - x_1)(1 - x_2) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n)}{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \geqslant (n-1)^n$$

**(б)**

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + \cdot \ldots \cdot + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}$$

**(в)**

$$\frac{(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n)}{(1 - x_1)(1 - x_2) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n)} \geqslant \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

**(г)**

$$(1 + x_1)(2 + x_2) \cdot \ldots \cdot (n + x_n) \leqslant 2n!$$

**3.** Докажите, что для любых положительных $x$ и $y$ верно

$$\frac{1}{x + y + 2} - \frac{1}{(x+1)(y+1)} \leqslant \frac{1}{16}.$$

**4.** Докажите, что $0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}$, при $x, y, z \geqslant 0$ и $x + y + z = 1$.

**5.** **(а)** Докажите, что при $x_1, \ldots, x_n \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}}.$$

**(б)** Докажите, что если все $x_i$ принадлежат отрезку $[0, 1]$, то выполняется неравенство с противоположным знаком.

**6.** Неотрицательные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = n$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$(a_1^2 + a_1)(a_2^2 + a_2) \cdot \ldots \cdot (a_n^2 + a_n).$$

**7.** Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$$

**8.** Пусть $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$. Докажите неравенство

$$(a + b + c + 4)\left(\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca}\right) \leqslant 15.$$