Векторы

1. Докажите, что если четырёхугольники $ACPH$, $AMBE$, $AHBT$, $BKXM$, $CKXP$ — параллелограммы (вершины всех параллелограммов перечислены против часовой стрелки), то четырёхугольник тоже $ABTE$ — параллелограмм.

2. Точки M, K, N и L — середины сторон AB, BC, CD, DE пятиугольника $ABCDE$, P и Q — середины отрезков MN и KL. Докажите, что отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

3. **(а)** Докажите, что если M точка пересечения медиан треугольника ABC, то
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$$
(б) На сторонах треугольника заданы точки, которые делят стороны в одном и том же соотношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника с вершинами в точках деления совпадают.

4. Пусть H — точка пересечения высот, а O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что
$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

5. Докажите, утверждение о прямой Эйлера с помощью векторов.
В любом треугольнике центр описанной окружности O, точка пересечения медиан M и точка пересечения высот H лежат на одной прямой. Причём точка M лежит на отрезке OH и
$$OM : MH = 1 : 2.$$

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Пусть H_a — ортоцентр треугольника BCD, M_a — середина отрезка AH_a; точки M_b, M_c и M_d определяются аналогично. Докажите, что точки M_a, M_b, M_c и M_d совпадают.

7. Во вписанном четырёхугольнике отметили параллелограмм Вариньона. У четырёх получившихся треугольников, которые примыкают к вершинам исходного треугольника, отметили ортоцентры. Докажите, что они являются вершинами параллелограмма.

8. Вневписанные окружности касаются сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q соответственно. Точка L — середина PQ, точка M — середина BC. Точки L_1 и L_2 симметричны L относительно середин отрезков BM и CM соответственно. Докажите, что $L_1P = L_2Q$.

9. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Биссектрисы внешних углов A и B пересекаются в точке K, внешних углов B и C — в точке L, внешних углов C и D — в точке M, внешних углов D и A — в точке N. Пусть K_1, L_1, M_1, N_1 — точки пересечения высот треугольников ABK, BCL, CDM, DAN соответственно. Докажите, что четырехугольник $K_1L_1M_1N_1$ — параллелограмм.