

Орграфы и сильная связность

Ориентированные графы

0. В ориентированном графе из каждой вершины ведет хотя бы 1 ребро, докажите, что в таком графе есть цикл.
1. В шахматном турнире участвовало 12 человек. После окончания турнира каждый составил 12 списков. В первый входит только он сам, в каждый следующий те кто входит в предыдущий список и у кого они выиграли. Оказалось, что у всех участников 12 список содержит человека, отсутствующего в 11 списке. Посчитайте количество ничьих в этом турнире.
2. В некоторой стране есть столица и ещё 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.
3. В некотором государстве 101 город. Каждый город соединён с некоторыми из остальных одной дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит (а) 50 (b) 40 дорог и из каждого города выходит (а) 50 (b) 40 дорог. Докажите, что из каждого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по (а) двум (b) трем дорогам.
4. В стране некоторые пары городов соединены одной дорогой. На всех дорогах введено одностороннее движение. Известно, что из любого города можно добраться до любого другого не более, чем с одной пересадкой. Одну дорогу закрыли на ремонт, причём из любого города по-прежнему можно добраться до любого другого. Докажите, что для любых двух городов это можно сделать не более, чем с двумя пересадками.

Сильная связность

5. В ориентированном графе нет циклов.
- (а) Докажите, что найдётся вершина, в которую не ведёт ни одно ребро.
- (б) Докажите, что его вершины можно занумеровать так, что рёбра ведут из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером.

Определение. Ориентированный граф называется связным, если он превращается в связный граф при «стирании» ориентации ребер. Ориентированный граф называется сильно связным, если от любой вершины до любой другой можно добраться, проходя по ребрам в правильном направлении.

6. В сильно связном ориентированном графе (а) разрешены (б) запрещены кратные ребра, включая ребра, идущие в противоположные стороны. Докажите, что можно оставить лишь (а) $2n - 2$ (б) $2n - 3$ ребра так, что граф по-прежнему будет сильно связным

Определение. Пару вершин v , u ориентированного графа будем называть связанной, если существуют пути из v в u и путь из u в v .

7. Докажите, что любой ориентированный граф можно разбить на части (которые далее мы будем называть компонентами сильной связности) так, что пара вершин v , u связана, если и только если они находятся в одной компоненте сильной связности.
8. Докажите, что если вершины v , u лежат в одной компоненте сильной связности, то существует путь из v в u , все вершины которого также лежат в этой же компоненте сильной связности.
9. Некоторые города страны соединены авиалиниями, по которым в одном направлении летают самолеты. Известно, что есть город v , из которого нельзя попасть в город u . Докажите, что часть городов может отделиться так, что из оставшихся городов не будет ни одного перелета в отделившиеся.

10. Докажите, что на рёбрах любого графа можно расставить стрелки так, чтобы для каждой вершины модуль разности входящей и исходящей её степени не превосходил 1.
11. В ориентированном графе 200 вершин, из каждой вершины исходит хотя бы одно ребро, и в каждую вершину входит хотя бы одно ребро (Разрешены кратные ребра). Докажите, что можно провести 100 ребер так, чтобы граф стал сильно связным.
12. Петя и Вася играют в игру. Начинает Петя. Изначально дан пустой граф на n вершинах. За один ход разрешается провести одно ориентированное ребро. Запрещается проводить кратные ребра и ребро, если граф становится сильно связным. Проигрывает тот, кто не может делать ход. Кто выигрывает при правильной игре?