Единственность в геометрии

1. Точки M и N делят основание AC равнобедренного треугольника ABC, в котором $\angle B = 120^\circ$, на три равные части. Докажите, что треугольник MBN — равносторонний.

2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), в котором $\angle A = 30^\circ$. На стороне AB выбрана точка P, а на стороне AC — точка Q так, что $PQ = BC$ и $\angle PQC = 45^\circ$. Докажите, что $CP = BC$.

3. Внутри квадрата расположены три окружности, каждая из которых касается внешним образом двух других, а также касается двух сторон квадрата. Докажите, что радиусы двух из данных окружностей одинаковы.

4. В треугольнике ABC угол C в два раза больше угла B, CD — биссектриса треугольника. Из середины M стороны BC опущен перпендикуляр MH на отрезок CD. На стороне AB нашлась такая точка K, что $\triangle KMH$ — равносторонний. Докажите, что точки M, H и A лежат на одной прямой.

5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABD лежит на прямой CF, где F — проекция D на AB.

6. В треугольнике ABC угол A равен 45°, а чевианы BD и CF равны и перпендикулярны. Докажите, что $BC = BD$.

---

7. В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H. M — середина BH. Может ли угол AMC быть прямым?

8. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC произвольно выбираются точки D и E так, что $\angle BED = 3\angle BDE$. Точка D' симметрична точке D относительно прямой AC. Докажите, что прямая $D'E$ проходит через некоторую точку, не зависящую от выбора D и E.

9. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах BC, CA, AB взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Известно, что $BC \cdot AA_1 = CA \cdot BB_1 = AB \cdot CC_1$. Докажите, что AA_1, BB_1, CC_1 — это высоты треугольника ABC.