

Касающиеся окружности

1. Две окружности касаются внешним образом в точке A . К ним проведена общая внешняя касательная, касающаяся окружностей в точках C и D . Докажите, что $\angle CAD = 90^\circ$.
2. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ как на диаметрах построены окружности. Окружность, построенная на стороне AB касается окружности, построенной на стороне CD . А окружность, построенная на стороне BC , касается окружности, построенной на стороне AD . Докажите, что $ABCD$ — ромб.
3. (а) Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взята точка P . Докажите, что описанные окружности треугольников ABP и CDP касаются тогда и только тогда, когда

$$\angle ABP + \angle PCD = \angle APD.$$

- (б) I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Внутри треугольника расположена окружность, касающаяся сторон AB и BC в точках X и Y соответственно. Одну из точек пересечения этой окружности с описанной окружностью треугольника AIC назовём Z . Докажите, что описанные окружности треугольников AXZ и CYZ касаются друг друга.
4. Внутри треугольника ABC расположена окружность ω , которая касается его сторон AB и BC , а также проходит через точку I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что описанная окружность треугольника AIC касается данной окружности ω .
5. Равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой основание AD вдвое больше боковой стороны AB , вписана в окружность. Точки E и F выбраны на этой окружности так, что $AC \parallel DE$ и $BD \parallel AF$. Отрезок BE пересекает отрезки AC и AF в точках X и Y соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников BCX и EFY касаются.

-
6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . Продолжения противоположных сторон этого четырёхугольника пересекаются в точках K и N . Докажите, что окружность, описанная около треугольника AKN , касается окружности ω тогда и только тогда, когда окружность, описанная около треугольника CKN , касается окружности ω .
 7. Точки A , B , C и D лежат на окружности с центром O . Серединные перпендикуляры к отрезкам AD и BC пересекают прямую AB в точках P и Q . Докажите, что окружности, описанные около треугольников OPQ и OSD , касаются.