Запуск процесса на графе

Мысль. При построении конструкции на графе с заданными свойствами бывает полезно запустить процесс с улучшением, обосновa его конечность полуинвариантом. При этом решение бывает проще оформить через принцип крайнего, выбрав конструкцию с экстремальным полуинвариантом (дефектом).

Пример. Докажите, что в связном графе существует остовное дерево.

Пример. В парламенте у каждого не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в его палате будет не более одного врага.

1. В селе некоторые дома соединены проводами. Соседями называются двое, дома которых соединены проводом. Всегда ли удастся поселить в каждый дом по одному человеку, лжецу или рыцарю, так, чтобы на вопрос: «Есть ли среди ваших соседей лжецы?», — каждый ответил положительно?

2. Среди 49 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из двух или трёх человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

3. Степень каждой вершины графа не превосходит 11. Докажите, что все вершины этого графа можно раскрасить в четыре цвета так, что количество отрезков с одноцветными концами будет не более, чем количество вершин.

4. Дети посещают кружки. Докажите, что можно несколько школьников принять в пионеры так, чтобы в каждом кружке был хотя бы один пионер и для любого пионера нашелся кружок, в котором он был бы единственным пионером.

5. Города некоторой страны соединены дорогами (каждая дорога соединяет ровно два города) так, что из любого города в любой можно проехать единственным образом. Некоторые из городов этой страны являются *стратегическими*; каждый город, лежащий на пути между двумя стратегическими городами, поддерживает радиосвязь хотя бы с одним из них. Докажите, что найдутся два соседних города, в объединении поддерживающие радиосвязь со всеми стратегическими городами (считается, что стратегический город поддерживает связь сам с собой).

6. 25 коротышек делят садовые участки в Цветочном городе. Каждый участок представляет собой квадрат 1×1, все участки вместе составляют квадрат 5×5. Каждый коротышка находится в ссоре не более, чем с тремя другими. Доказать, что можно распределить участки таким образом, чтобы участки двух поссорившихся коротышек не были соседними.