

Уравнения и неравенства с целыми/дробными частями

Решите уравнения:

1. $[x] \cdot \{x\} = x^2$

2. $\{2\{2x\}\} = x$

3. $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5}$

4. Существует ли такое $a > 0$, что число $[100a] + [71a]$ можно представить в виде $171k + 170$, где k — натуральное.

5. Найдите все такие целые b , для которых у уравнения

$$[x^2] - 2026x + b = 0$$

нечётное число корней.

6. Докажите, что для всех натуральных m и n выполнено неравенство

$$[m\sqrt{2}] \cdot [n\sqrt{7}] < [mn\sqrt{14}].$$

7. Найдите наименьшее значение выражения

$$\left[\frac{8(b+c)}{a} \right] + \left[\frac{8(c+a)}{b} \right] + \left[\frac{8(a+b)}{c} \right],$$

где a, b, c — произвольные натуральные числа.

8. Сумма дробных частей нескольких положительных чисел равна целой части их произведения. Докажите, что дробная часть суммы этих чисел равна произведению их целых частей.