

Телескопирование

Идея. Если мы хотим посчитать сумму $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, и оказалось, что $a_1 = b_2 - b_1; \dots; a_n = b_{n+1} - b_n$, то $S = b_{n+1} - b_1$.

Пример. Имеет место равенство $2x + 1 = (x + 1)^2 - x^2$, поэтому

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2x + 1) = (x + 1)^2.$$

1. (а) Найдите сумму первых n чисел Фибоначчи на нечётных местах:

$$F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1}.$$

- (б) Найдите сумму $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n$.

2. Найдите значения выражений:

(а) $\frac{1}{\sqrt{50} + \sqrt{51}} + \frac{1}{\sqrt{51} + \sqrt{52}} + \frac{1}{\sqrt{52} + \sqrt{53}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$

(б) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}.$

(в) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{2023 \cdot 2026}.$

(г) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2025}{2026!}.$

3. Докажите неравенства:

(а) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$

(б) $\frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_2 F_4} + \dots + \frac{1}{F_n F_{n+2}} < 1.$

4. Найдите сумму $4 \cdot 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 5 + \dots + 4 \cdot 98 \cdot 100.$

5. Докажите, что для любого простого p числа от 1 до $p - 1$ можно так выписать в ряд $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$, что все произведения $a_1 a_2 \dots a_k$ различны по модулю p .

6. (а) Дано натуральное число n . Найдите сумму $1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ цифр}}.$

- (б) Даны действительные числа a, q, d . Последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$ для всех натуральных $k \leq n - 1$ задана соотношениями

$$x_1 = a, \quad x_{k+1} = qx_k + d$$

Найдите сумму $x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

7. Для действительного числа q найдите сумму $1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1}.$