Принцип крайнего в графах

Пример. В графе G степень каждой вершины хотя бы k, где $k \geqslant 2$. Докажите, что в G существует простой путь длины хотя бы k и простой цикл длины хотя бы $k+1$.

1. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A доступен для города B, если из B можно долететь в A, возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R, для которого и P, и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что город доступен для себя.)

2. В группе из n^2 человек каждый имеет не более n знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать n человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

3. В государстве некоторые города соединены двусторонними беспересадочными авиалиниями. Из каждого города выходит не более 10 авиалиний. Всего в государстве более 200 авиалиний. Докажите, что найдутся 11 авиалиний, никакие две из которых не имеют общих концов.

4. Назовём две вершины в графе *близкими*, если между ними существует путь, состоящий из не более 2 рёбер. Докажите, что в любом не пустом графе найдутся две близкие вершины одинаковой степени.

5. В классе учатся 30 человек. Учитель знает, что среди любых 7 из них есть по крайней мере 2 друга. Докажите, что учитель может их выставить не более чем в 6 шеренг так, чтобы каждые два человека из одной шеренги, стоящие рядом, были друзьями (в шеренге может стоять всего один человек).

6. В математической олимпиаде участвуют несколько детей (хотя бы 5). Оказалось, что среди них нет трёх попарно знакомых, но в любой компании из пяти участников можно выбрать трёх людей, имеющих общего знакомого. После олимпиады $2n+1$ детей выстроились по кругу. Докажите, что найдутся двое детей, которые стоят рядом, но не знакомы.

7. В компании из ста тысяч человек среди любых десяти есть трое попарно знакомых. Докажите, что можно выбрать восьмерых из них так, чтобы любой из оставшихся был знаком с кем-то из этих восьмерых.

8. Все простые циклы графа G имеют длину, кратную натуральному числу $n \geqslant 3$. Докажите, что в графе есть вершина степени не более 2.

9. В неориентированном графе G без петель и кратных рёбер 2026 вершин. Для любых четырёх вершин графа G существуют хотя бы две дороги между ними. Известно, что в G нет гамильтонова пути. Докажите, что можно выбрать две вершины A и B таким образом, чтобы любая из оставшихся вершин была соединена дорогой хотя бы с одной из вершин A и B.