Взаимная простота

Определение. Натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ *взаимно просты*
- *в совокупности*, если у всех них нет общего простого делителя, т.е. НОД$(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$;
- *попарно*, если у каждой пары нет общего простого делителя. т.е. НОД$(a_i, a_j) = 1)$ для всех $i \neq j$.

Полезные техники при работе со взаимной простотой:

- сравнения по модулю произвольного общего простого делителя p;
- НОД$(a; b)$ = НОД$(a; a + b)$ = НОД$(a; a - b)$;
- если ab кратно c и НОД$(b; c) = 1$, то a кратно c;
- если $a = a_0 d$, $b = b_0 d$, где $d =$ НОД$(a; b)$, то НОД$(a_0; b_0) = 1$;
- если НОД$(a; b) = 1$ и $ab = c^k$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $c, k \in \mathbb{N}$, то $|a| = x^k, |b| = y^k$ для некоторых $x, y \in \mathbb{N}$.

---

1. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что наибольший общий делитель чисел $a + b$ и $a^2 + b^2$ равен 1 или 2.

2. В группе из 67 школьников у каждого не более 33 знакомых, причём у любого мальчика есть знакомая девочка, а у любой девочки — знакомый мальчик. Может ли оказаться, что все девочки из этой группы имеют в ней поровну знакомых мальчиков, а все мальчики — поровну знакомых девочек? *Все знакомства — взаимные.*

3. Докажите, что из любых шести четырёхзначных чисел, взаимно простых в совокупности, всегда можно выбрать пять чисел, также взаимно простых в совокупности.

4. Взаимно простые натуральные числа a и b таковы, что $a + b$ кратно $a - b$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab + 1$ и $4ab + 1$ является точным квадратом.

5. x, y, z — натуральные числа, НОД$(x, y, z) = 1$ и $\dfrac{xy}{x - y} = z$. Докажите, что $(x - y)$ — точный квадрат.

6. Натуральные числа a, b, c взаимно просты в совокупности и удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$. Докажите, что каждое из них — точный квадрат.

7. Существуют ли три натуральных числа, что в любой паре из них остаток от деления большего числа на меньшее равен неполному частному?

8. Натуральные числа a и b больше 1. Известно, что числа $a^2 + b$ и $a + b^2$ — простые. Докажите, что числа $ab + 1$ и $a + b$ — взаимно простые.

9. Найдите все пары целых чисел (x, y), для которых числа $x^3 + y$ и $x + y^3$ делятся на $x^2 + y^2$.

10. Натуральное число n таково, что $3n^2+3n+1$ — точный квадрат. Докажите, что $\sqrt{3n^2 + 3n + 1}$ — сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел.