Важные моменты

Пример. В таблице 17×17 восемьдесят клеток закрашено в черный цвет, а остальные — белые. Разрешается закрасить строку или столбец в черный цвет, если большинство клеток в ней — чёрные. Докажите, что при помощи таких операций нельзя всю таблицу сделать чёрной.

Пример. Сто гномов, веса которых равны 1, 2, 3, …, 100 фунтов, собрались на левом берегу реки. Плавать они не умеют, но на этом же берегу находится гребная лодка грузоподъёмностью 100 фунтов. Из-за течения плыть обратно трудно, поэтому у каждого гнома хватит сил грести с правого берега на левый не более одного раза (грести в лодке достаточно любому из гномов; гребец в течение одного рейса не меняется). Смогут ли все гномы переправиться на правый берег?

1. Из числа, большего 10^{10}, вычитают его сумму цифр. С полученным числом поступают точно так же. И так далее. Докажите, что в какой-то момент число будет состоять из 10 одинаковых цифр.

2. С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её *неожиданной*, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3, 4, 2, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четвёрка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок — по 10 пятёрок, четвёрок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?

3. Каждый из 52 человек знает свою уникальную новость. Каждый из них может написать другому СМС со всеми известными ему новостями. Какое наименьшее число СМС нужно, чтобы каждый узнал все новости?

4. На вечеринку пришли 100 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно один знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно 2, 3, 4, …, 99 знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

5. Имеется лабиринт, состоящий из n окружностей, касающихся прямой AB в точке M. Все окружности расположены по одну сторону от прямой, а их длины составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Два человека в разное время начали ходить по этому лабиринту. Их скорости одинаковы, а направления движения различны. Каждый из них проходит все окружности по порядку, и, пройдя наибольшую, снова идет в меньшую.

Докажите, что они встретятся.

6. На каждой клетке шахматной доски вначале стоит по ладье. Каждым ходом можно снять с доски ладью, которая бьет нечётное число ладей. Какое наибольшее число ладей можно снять? (Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной вертикали или горизонтали и между ними нет других ладей.)

7. В ряд записано N чисел. Каждую секунду робот выбирает какую-либо пару рядом стоящих чисел, в которой левое число больше правого, меняет их местами и при этом умножает оба числа на 2. Докажите, что через некоторое время сделать очередную такую операцию будет невозможно.

8. На доске написано натуральное число. Раз в минуту к нему прибавляют произведение его ненулевых цифр. Докажите, что какое-то число прибавят бесконечно много раз.

9. Круг разбит на n секторов, в некоторых секторах стоят фишки — всего фишек $n + 1$. Затем позиция подвергается преобразованиям. Один шаг преобразования состоит в следующем: берутся какие-нибудь две фишки, стоящие в одном секторе, и переставляются в разные стороны в соседние секторы. Докажите, что через некоторое число шагов не менее половины секторов будет занято.