

Усреднение на графах (продолжение)

1. В дереве степени всех вершин нечётные. Докажите, что более половины его вершин — висячие.
2. В Думе 100 депутатов. Известно, что у любых двух депутатов есть не менее двух общих друзей (дружба взаимна). Докажите, что кто-то из депутатов имеет хотя бы 15 друзей.
3. Докажите, что для любого n существует турнир (полный ориентированный граф, т.е. все сыграли со всеми в некоторую игру ровно один раз, по итогам игры не бывает ничьей) на n вершинах, в котором найдётся по крайней мере $n!/2^{n-1}$ гамильтоновых путей (путей, проходящих по всем вершинам ровно один раз).
4. В Думе 1600 депутатов, которые образовали 16000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие не менее четырёх общих членов.
5. Имеется 2027 лампочек, некоторые пары которых соединены проводами.
 - (а) Докажите, что можно так выбрать пару лампочек, что среди оставшихся найдутся хотя бы 1013, каждая из которых или соединена с обеими, или с обеими не соединена.
 - (б) Какое может быть минимальное количество троек лампочек, в которых любые две лампочки соединены или любые две лампочки не соединены?
6. У инженера Саши есть несколько лампочек и несколько переключателей. Каждая лампочка соединена с одним или с двумя переключателями. Саша хочет выкинуть несколько переключателей и лампочек, чтобы каждая оставшаяся лампочка была соединена ровно с одним оставшимся переключателем. Докажите, что Саша может это сделать так, что у него останется хотя бы половина приборов.
7. В кружке 42 человека, любые двое из которых имеют среди кружковцев не менее десяти общих друзей. Докажите, что найдутся двое, имеющие среди кружковцев не менее двенадцати общих друзей.
8. На турнире 30 сеньоров и 30 юниоров. Каждый сеньор сыграл в шашки с 1 сеньором и 15 юниорами, а каждый юниор — с 1 юниором и 15 сеньорами. Докажите, что найдутся два сеньора и два юниора, что эти сеньоры сыграли между собой, юниоры — между собой, каждый из двух сеньоров — хотя бы с одним из двух юниоров, а каждый из двух юниоров — хотя бы с одним из двух сеньоров.