Усреднение на графах

Усреднение. Многие подсчёты на графах построены на идее «усреднения». Если среднее значение величины равно k, то:

- есть ситуация, когда величина не больше k;
- есть ситуация, когда величина не меньше k;
- либо во всех ситуациях величина равна k, либо есть и ситуации, когда величина больше k, и ситуации, когда величина меньше k.

Замечание. Обычно решение можно оформить двумя способами:

- в прямую сторону через оценку среднего значения;
- от противного через двойную оценку суммы величин по всем ситуациям.

Важно. Усреднение даёт грубую оценку (как отношение площадей в клетчатых задачах), часто это лишь первый шаг к решению!

Свойство. $AM(x_1, \ldots, x_n)$ — *среднее арифметическое* чисел $x_1, \ldots, x_n$. Если $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ — некоторые наборы чисел, k и l — константы, то

- $AM(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) = AM(a_1, a_2, \ldots, a_n) + AM(b_1, b_2, \ldots, b_n)$;
- $AM(ka_1 + l, ka_2 + l, \ldots, ka_n + l) = k \cdot AM(a_1, a_2, \ldots, a_n) + l$.

Распространённые средние в графах связаны с рёбрами:

- средняя степень вершины;
- среднее число рёбер внутри некоторой конфигурации;
- среднее число общих знакомых (подсчёт «осьминожек»).

Пример. На шахматной доске отметили 25 клеток. Докажите, что можно расставить 8 не бьющих друг друга ладей так, чтобы не менее 4 ладей стояли на отмеченных клетках.

Пример. (а) В компании из 20 человек у каждого хотя бы 10 знакомых. Докажите, что найдутся такие две тройки людей, что любые два человека из разных троек знакомы.
(б) Какое минимальное количество знакомых должно быть у каждого, чтобы при таком способе решения гарантировать наличие $K_{2,3}$?

1. Телефонная компания ввела льготный тариф для школьников, позволяющий каждому школьнику выбрать 10 человек, которым он может звонить бесплатно. Какое наибольшее количество школьников можно подключить к этому тарифу так, чтобы среди каждых двух школьников один мог бесплатно звонить другому?

2. В классе 34 ребёнка, некоторые из которых дружат (дружба взаимна). Каждый день в 2025 году преподаватель собирал команду на матбой из 6 детей, которые попарно дружат. Известно, что никакой состав не повторился более 3 раз. Докажите, что есть ребёнок, который дружит хотя бы с 8 одноклассниками.

3. Докажите, что в любом графе можно удалить не более половины рёбер так, чтобы он стал двудольным.

4. В деревне Мартышкино у каждого мальчика все знакомые с ним девочки знакомы между собой. У каждой девочки среди её знакомых мальчиков больше, чем девочек. Докажите, что в Мартышкино мальчиков живёт не меньше, чем девочек.

5. В множестве $\{1, 2, \ldots, 100\}$ выбрано 45 подмножеств так, что любой элемент лежит ровно в 36 подмножествах. Докажите, что найдутся три подмножества, в объединении дающие всё множество.

6. На улице стоят 103 фонаря. В комнате управления находятся 322 тумблера. Каждый фонарь соединён с 161 тумблером. Никакие два тумблера не соединены с одним и тем же набором фонарей. Переключение тумблера меняет состояние всех фонарей, с которыми он соединён (горящие потухают и наоборот). Изначально все фонари зажжены. Докажите, что можно нажать на некоторые 67 тумблеров таким образом, чтобы включилось не менее 52 фонарей.