

Целая и дробная часть числа

Определение. *Целой частью* числа a называется наибольшее целое число, не превосходящее a . Обозначается $[a]$.

Определение. *Дробной частью* числа a называется разность между самим числом и его целой частью. Обозначается $\{a\} = a - [a]$.

1. Для $x > 1$ докажите равенство $[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = [\sqrt[4]{x}]$

2. Найдите количество решений уравнения

$$\{(x+1)^3\} = x^3$$

3. Докажите, что при натуральном $n \geq 2$ число $[(\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+2})^3]$ даёт остаток 7 при делении на 8.

4. Для натуральных n докажите, что

$$\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \dots + \{\sqrt{n^2}\} \leq \frac{n^2 - 1}{2}.$$

5. Действительное число $x \geq 1$ таково, что число $[x^2]$, $[x^3]$, $[x^4]$ — точные квадраты. Докажите, что $[x]$ — тоже точный квадрат.

6. Докажите, что для любого натурального n и любого $x > 1$ верно неравенство

$$\{x\} + \{2x\} + \dots + \{nx\} \leq \frac{nx}{2}.$$

7. Верно ли, что существует такое положительное C , что для любых положительных чисел x и y с целой суммой выполняется неравенство

$$\{x^2\} + \{y^2\} + \frac{C}{(x+y)^2} \leq 2.$$