Задачи перед Регионом

1. В стране 100 городов и не менее 1000 дорог между городами. Докажите, что туристическая компания может организовать не менее 10 «Золотых колец», то есть, не менее 10 непересекающихся по дорогам циклических маршрутов.

2. Докажите, что из любой бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, можно удалить некоторые члены так, чтобы оставшиеся члены образовали бесконечную геометрическую прогрессию.

3. *Расстоянием* между числами $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ и $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$ назовём максимальное i, для которого $a_i \neq b_i$. Все пятизначные числа выписаны друг за другом в некотором порядке. Какова при этом минимально возможная сумма расстояний между соседними числами?

4. **(а)** Дана система из нескольких лампочек и переключателей. Каждый переключатель соединен с несколькими лампочками; к каждой лампочке подключён хотя бы один переключатель. При нажатии на переключатель все лампочки меняют состояние: выключенные включаются, а включенные выключаются. Докажите, что нажав на несколько переключателей, можно добиться того, чтобы хотя бы половина всех лампочек была включена. Изначально все лампочки выключены.

(б) Теперь лампочек ровно 99, каждая лампочка соединена с 25 переключателями, а всего переключателей 50. Докажите, что можно нажать на 17 различных переключателей так, чтобы загорелось хотя бы 50 лампочек.

5. В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$. На сторонах AB и BC нашлись такие точки P и Q соответственно, что $AP = CQ$ и $AP + PQ = AC$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

6. Миша расставил по одному числу в каждую клетку таблицы 67×67. Назовём таблицу *интересной*, если любые две строки различны (то есть отличаются хотя бы в одном столбце). Таблица Миши оказалась интересной. Докажите, что можно убрать некоторый столбец так, чтобы таблица попрежнему была интересной.

7. $a, b, c > 0$, Докажите, что

$$(a+b)(a+c) \geqslant 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

---

8. На доске можно либо написать две единицы, либо стереть любые два уже написанных одинаковых числа n и написать вместо них числа $n+1$ и $n-1$. Какое минимальное количество таких операций требуется, чтобы получить число 2005? (Сначала доска была чистой.)

---

9. Имеется набор из 16 карточек. С тёмной стороны все карточки одинаковые, а на светлых сторонах карточки пронумерованы числами от 1 до 16. Маша выложила все карточки на стол тёмными сторонами вверх в виде квадрата 4×4 так, что любые две карточки с соседними числами имеют общую сторону. Можно ли так выбрать 7 карточек, что, одновременно перевернув их, можно было бы однозначно восстановить местоположение всех чисел?

---

10. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CAD = 59°$, $\angle CAB = 62°$, $\angle ABD = \angle CBD = 22°$. Найдите ACD.
