# Делители числа

**Определение.** *Собственным* делителем числа называется натуральный делитель этого числа, не равный самому числу.

Основные приёмы решения задач про делители:

- рассмотреть пары делителей числа $n$ с произведением $n$;
- рассмотреть наименьший/наибольший простой делитель;
- посмотреть на степени вхождения конкретного простого делителя;
- сделать оценку (часто оценку частного).

**1.** Натуральное число $N$ имеет больше 1200 делителей. Все эти делители записали на доске. Саша стёр 300 наибольших и 300 наименьших из них. Среди оставшихся чисел оказалось поровну чётных и нечётных. Докажите, что среди всех делителей тоже поровну чётных и нечётных.

**2.** Найдите все натуральные числа $n$, для которых сумма квадратов всех их собственных делителей равна $2n + 2$.

**3.** Натуральное число $n$ назовём *хорошим*, если каждый его натуральный делитель, увеличенный на 1, является делителем числа $n+1$. Найдите все хорошие натуральные числа.

**4.** Пусть $N > a > b > c > 1$ — три наибольших собственных делителя числа $N$. Сколько существует чисел $N$, не превосходящих полтора миллиона, для которых $a = b + c$?

**5.** С составным натуральным числом $a$ разрешается проделывать следующие операции: разделить на наименьший собственный делитель, больший 1, или прибавить любое натуральное число, делящееся на его наибольший собственный делитель. Если число получилось простым, то с ним ничего нельзя делать. Верно ли, что с помощью таких операций из любого составного числа можно получить число 2011?

**6.** Все натуральные делители числа $n$ разбили на пары так, что сумма чисел в каждой паре — простое число. Докажите, что все эти простые различны.

**7.** Каждое из двух натуральных чисел равно сумме трёх собственных делителей другого числа. Верно ли, что эти числа равны?

**8.** Саша выбрал натуральное число $N > 1$ и выписал в строчку в порядке возрастания все его натуральные делители: $d_1 < \ldots < d_s$ (так что $d_1 = 1$ и $d_s = N$). Затем для каждой пары стоящих рядом чисел он вычислил их наибольший общий делитель; сумма полученных $s - 1$ чисел оказалась равной $N - 2$. Какие значения могло принимать $N$?

**9.** Дано натуральное число $n$. На доске выписаны все натуральные числа от 900...00 до 1200...00 (оба числа оканчиваются на $n$ нулей). У каждого из них выбрали собственный делитель. Докажите, что хотя бы два из этих делителей совпадают.

**10.** Найдите все нечётные натуральные $n$ ($n > 1$) такие, что для любых взаимно простых делителей $a$ и $b$ числа $n$ число $a + b - 1$ также является делителем $n$.