Много равных между собой

Пример. Действительные числа a_1, a_2, …, a_{104} таковы, что

$$a_1 + a_2 \ldots a_{104} = a_2 + a_3 \ldots a_{104} a_1 = \ldots = a_{104} + a_1 \ldots a_{103}$$

Докажите, что среди чисел a_1, a_2, …, a_{104} есть хотя бы 52 равных.

Пример. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n - a_k = p_n - p_k$. Докажите, что все числа $a_1, a_2, \ldots$ простые.

1. **Свойство ряда равных отношений.** Пусть $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$. Докажите, что <u>практически всегда</u>*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 \cdot k_1 + a_2 \cdot k_2 + \ldots + a_n \cdot k_n}{b_1 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 + \ldots + b_n \cdot k_n}$$

*Какое должно быть условие на $k_1, k_2, \ldots, k_n$ для корректности СРРО?

2. Боковая сторона AD трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) разделена точками M и P (P лежит между A и M) на три равные части. Через точки M и P проведены две прямые MN и PQ, параллельные основаниям трапеции (N и Q лежат на боковой стороне CB). Найдите длины отрезков MN и PQ, если $AB = 2$, $CD = 5$.

3. Действительные числа a, b и c таковы, что

$$\frac{a}{b+c-a} = \frac{b}{c+a-b} = \frac{c}{a+b-c}.$$

Чему может быть равно $\frac{a+b}{c}$?

4. a и b — натуральные числа. Сумма 2026 дробей $\frac{a+1}{b+1}, \frac{a+2}{b+2}, \ldots, \frac{a+2026}{b+2026}$ равна 2026. Чему может быть равно произведение этих 2026 дробей?

5. Докажите, что если

$$\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c} \neq 0,$$

то

$$\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}.$$

6. Паша выбрал целые числа x и y. Виктор заметил, что какие бы натуральные числа k и m не взять, число xk^2+ym^2 оказывается точным квадратом. Докажите, что x либо y равен нулю.

7. Решите в действительных числах уравнение

$$\sqrt{2-x^2-y^2} = \sqrt[3]{3-x^3-y^3}.$$

8. Последовательность x_n удовлетворяет следующим условиям: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а для каждого $n \geqslant 3$ выполнено равенство

$$x_{n-2}(x_{n+1}+x_{n-1}) = x_n(x_n+x_{n-1}).$$

Верно ли, что каждое из чисел x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_{2026} целое?