

Рациональные и иррациональные числа

1. В клетки таблицы 50×50 записывают действительные числа следующим образом. Сначала выбирают 100 различных действительных чисел, среди которых 50 рациональных и 50 иррациональных. Затем каждой строке и каждому столбцу присваивается одно из чисел так, чтобы каждое число было присвоено ровно один раз. И в конце в каждую клетку записывается сумма чисел, присвоенных строке и столбцу, в пересечении которых находится клетка. В каком наибольшем количестве клеток могли оказаться рациональные числа?
2. Существует ли многочлен $P(x)$ такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ и для всех целых k , отличных от 1 и 2, $P(k)$ — иррациональное число?
3. Рациональные числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0.$$

Докажите, что число $1 - ab$ является квадратом рационального числа.

4. Рационально или иррационально следующее число

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \quad ?$$

-
5. Найдите все натуральные n , для которых число $\sqrt{\frac{n^2 - 5}{n + 1}}$ — рационально.
 6. Докажите, что

$$\sqrt{\sqrt[3]{4} - 1} + \sqrt{\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}} = \sqrt{3}.$$

7. Положительные числа a , b , c таковы, что $a + 2\sqrt{bc}$, $b + 2\sqrt{ca}$, $c + 2\sqrt{ab}$ рациональны. Верно ли, что среди чисел a , b , c обязательно найдется рациональное?