

Глобальные характеристики

07-10.3. На клетчатой плоскости нарисован многоугольник с вершинами в узлах сетки. При этом нет сторон, идущих по линиям сетки. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков сетки, лежащих внутри многоугольника, равна сумме длин горизонтальных отрезков, лежащих внутри него.

Задачи для самостоятельного решения

1. На новогоднем утреннике в ряд стоят l лисят и k крольчих. Каждого ребёнка спросили, сколько детей слева от него одеты в костюм другого вида. Чему может быть равна сумма чисел, названных детьми?
2. Снегурочка поочерёдно открывает ячейки в адвент-календаре в виде квадрата 67×67 . Открыв очередную ячейку, она записывает в ней число — количество открытых ячеек, соседних с ней по стороне. Открыв весь адвент-календарь, Снегурочка складывает числа, записанные во всех ячейках. Какие значения может принимать эта сумма?
3. На двух противоположных гранях подарочной коробки нарисовано по одной ёлке, на двух других противоположных гранях — по две ёлки, а на двух оставшихся — по три ёлки. Из восьми таких коробок сложили куб $2 \times 2 \times 2$ и посчитали суммарное число ёлок на каждой из его шести граней. Могли ли получиться шесть последовательных чисел?
4. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{67}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2 , одинаковыми коэффициентами при x , но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i . Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_1(x_{67})$?
5. Внутри квадратного катка поставили 52 конуса. Некоторые из них соединены с вершинами квадрата и между собой так, что каток разбит на треугольники. При этом все выставленные конусы оказались вершинами полученных треугольников. Чему может быть равно число треугольников?
6. (а) В праздничном турнире по «Царю горы» среди 67 участников каждый сыграл с каждым ровно по одному разу. Староста Вилларибо возвёл количество побед каждого участника в квадрат и сложил все полученные числа. Староста Виллабаджо возвёл количество поражений каждого участника в квадрат и сложил все полученные числа. На сколько могут отличаться числа, полученные старостами? *Напомним, что в классическом «Царе горы» не бывает ничьих.*

(б) Докажите, что хотя бы в одной игре встретились жители, которые перед этой игрой участвовали в сумме в чётном числе игр этого турнира.

(в) Может ли в итоговой таблице однокругового турнира по «Царю горы», где бывают ничьи, оказаться, что для каждого участника сумма очков тех, у кого он выиграл, меньше суммы очков тех, кому он проиграл? *За победу начисляется 1 очко, за ничью — $\frac{1}{2}$ очка, за поражение — 0 очков.*

7. 52 конфеты произвольно делят на две кучи, подсчитывают количества конфет в них и записывают произведение этих двух чисел. Затем с одной из этих куч (в которой больше одной конфеты) проделывают ту же операцию: делят на две и записывают произведение количеств конфет в двух вновь образованных кучах. Затем ту же операцию повторяют с одной из трёх полученных куч и так далее, пока во всех кучах не станет по одной конфете. Чему может быть равна сумма 51 записанных произведений?
8. В новогоднем подарке было несколько левых палочек Twix. Каждым действием либо добавляли одну правую палочку и записывали количество левых палочек на первый листок, либо убирали одну левую палочку и записывали количество правых палочек на второй листок. В итоге на столе остались только правые палочки Twix. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.
9. Внутри прямоугольного пруда вырезали n прямоугольных прорубей со сторонами, параллельными краям пруда. На какое наименьшее число прямоугольных частей можно гарантированно разрезать оставшийся лёд этого пруда? *Дыры не перекрываются и не соприкасаются.*