Диагностическая работа. Второй (письменный) тур

1. a и b — натуральные числа. Известно, что сумма 2026 дробей $\frac{a+1}{b+1}$, $\frac{a+2}{b+2}$, $\ldots$ $\frac{a+2026}{b+2026}$ равна 2026. Чему может быть равно произведение этих 2026 дробей?

Ответ: 1.

Первое решение: Если $a < b$, то все дроби меньше 1, поэтому их сумма меньше 2026. если $a > b$, то все дроби больше 1, поэтому их сумма больше 2026. Тогда $a = b$, все исходные дроби по 1, их произведение равно 1.

Второе решение: Заметим, что $\dfrac{a+k}{b+k} = \dfrac{b+k+(a-b)}{b+k} = 1+\dfrac{a-b}{b+k}$. Тогда

$$2026 = \frac{a+1}{b+1} + \cdots + \frac{a+2026}{b+2026} = \left(1+\frac{a-b}{b+1}\right) + \cdots + \left(1+\frac{a-b}{b+2026}\right) =$$
$$= 2026 + (a-b)\left(\frac{1}{b+1} + \cdots + \frac{1}{b+2026}\right)$$

При натуральном b все слагаемые в сумме $\dfrac{1}{b+1} + \ldots + \dfrac{1}{b+2026}$ положительны, поэтому эта скобка не равна 0, т.е. $a - b = 0$, все исходные дроби по 1, их произведение равно 1.

2. Существует ли десятизначное натуральное число, состоящее из различных цифр, такое, что любая цифра, не стоящая с краю, является делителем суммы двух соседних?

Ответ: Существует. Например, 9876543210.

Решение: В числе 9876543210 любые три подряд идущих цифры равны $a+1$, a и $a-1$. Тогда $(a+1)+(a-1) = 2a$, что делится на a.

3. Петя разрешил Васе вырезать в квадрате 11×11 только клетки из центральной строки и центрального столбца. Какое наибольшее количество клеток сможет вырезать Вася так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на трёхклеточные уголки?

Ответ: 13.

Первое решение: Применим раскраску-решётку (см. рис.), когда чёрные клетки стоят на пересечении нечётных по номеру строк и столбцов. Тогда каждая из 36 чёрных клеток не вырезана и любые две из них должны принадлежать разным уголкам. Значит, на доске должно остаться хотя бы $36 \cdot 3 = 108$ клеток из $11^2 = 121$ имеющихся, т.е. вырезать можно не более $121 - 108 = 13$ клеток. Пример методом пропеллера см. на рис., где крестиками отмечены 13 вырезанных клеток, а оставшаяся часть разбита на 4 равные зоны в виде квадрата 5×5 с двумя дополнительными клетками, которая режется на уголки — см. левую верхнюю зону.)

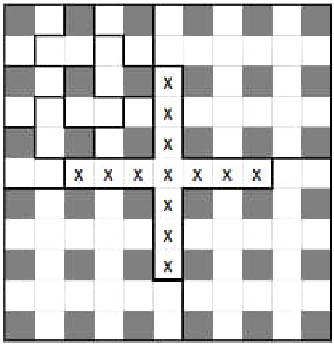

Рис. 1: 3 задача

Второе решение: Выделим 4 угловых квадрата 5×5. Клетки никакого трёхклеточного уголка не могут содержаться сразу в двух таких квадратах. Площадь каждого куска из уголков, накрывающих один квадрат 5×5 делится на 3 и не меньше $5 \cdot 5 = 25$, т.е. хотя бы 27. Тогда каждому из 4 таких кусков не хватает минимум 2 клеток из центрального креста, поэтому оттуда вырезано не более $21 - 4 \cdot 2 = 13$ клеток.

4. На гипотенузе AB прямоугольного неравнобедренного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = AC$, $BE = BC$. Точки A' и B' симметричны точкам A и B соответственно относительно прямых CE и CD. Докажите, что прямые $A'B'$ и AB перпендикулярны.

Решение: $\angle DCE = 180° - \angle ADC - \angle BEC = 180° - (180° - \angle A)/2 - (180° - \angle B)/2 = (\angle A + \angle B)/2 = 90°/2 = 45°$, значит, при симметрии лучи CA' и CB' совпадут. $\angle ACA' = 2\angle ACE = 2 \cdot (90° - \angle BCE) = 2 \cdot (90° - (180° - \angle B)/2) = \angle B = 90° - \angle A$, откуда следует, что прямая $A'B'$ перпендикулярна AB.

5. Существуют ли такие целые x и y, что $x^5y + 3$ и $xy^5 + 3$ оба являются кубами целых чисел?

Ответ: Нет.

Решение: Будем пользоваться известным результатом теории сравнений, что кубы целых чисел могут иметь только остатки $0, 1$ или 8 по модулю 9.

Заметим, что x не делится на 3, т.к. иначе $x^5y+3 \equiv 3 \pmod 9$, что не может быть кубом целого числа. Аналогично y не делится на 3, иначе $xy^5 + 3$ не является точным кубом.

Тогда x и y взаимно просты с 9, поэтому $x^5y \cdot xy^5 = (xy)^6 = ((xy)^3)^2 \equiv \equiv 1 \pmod 9$. Этот же результат можно получить по теореме Эйлера, заметив, что НОД$(xy, 9) = 1$ и $\varphi(9) = 6$.

Пусть x^5y имеет остаток r при делении на 9, тогда xy^5 имеет обратный остаток к r. Переберём пары обратных остатков при делении на 9:

- $x^5y \equiv 1 \pmod 9$ и $xy^5 \equiv 1 \pmod 9$. Тогда $x^5y + 3 \equiv 4 \pmod 9$ — не является точным кубом;
- $x^5y \equiv 2 \pmod 9$ и $xy^5 \equiv 5 \pmod 9$. Тогда $x^5y + 3 \equiv 5 \pmod 9$ — не является точным кубом;
- $x^5y \equiv 4 \pmod 9$ и $xy^5 \equiv 7 \pmod 9$. Тогда $x^5y + 3 \equiv 7 \pmod 9$ — не является точным кубом;
- $x^5y \equiv 5 \pmod 9$ и $xy^5 \equiv 2 \pmod 9$. Тогда $xy^5 + 3 \equiv 5 \pmod 9$ — не является точным кубом;
- $x^5y \equiv 7 \pmod 9$ и $xy^5 \equiv 4 \pmod 9$. Тогда $xy^5 + 3 \equiv 7 \pmod 9$ — не является точным кубом;
- $x^5y \equiv 8 \pmod 9$ и $xy^5 \equiv 8 \pmod 9$. Тогда $x^5y + 3 \equiv 2 \pmod 9$ — не является точным кубом.

Таким образом, перебрав все случаи по модулю 9, мы пришли к тому, что данная система сравнений не имеет решений в целых числах.

6. На плоскости дан выпуклый многоугольник. Назовём его вершину A *хорошей*, если точка, симметричная вершине A относительно середины диагонали, соединяющей две соседние с A вершины, принадлежит многоугольнику (возможно, его границе). Какое наименьшее количество хороших вершин может быть у выпуклого стоугольника?

Ответ: 97.

Пример: Пусть три соседние вершины нашего стоугольника образуют правильный треугольник ABC, а остальные лежат на меньшей дуге AC описанной около ABC окружности.

Решение: Предположим теперь, что нашлись 4 нехорошие вершины, образующие выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Не умаляя общности, $\angle A + \angle B < 180^\circ$ и $\angle A + \angle D < 180^\circ$. Пусть M и N — вершины, соседние с C в стоугольнике (порядок такой, что $ABMCND$ выпуклый шестиугольник, возможно вырожденный, если $M = B$ или $N = D$). Пусть точка K такова, что $BCDK$ — параллелограмм. Тогда K лежит в четырёхугольнике $ABCD$. Заметим, что прямая, проходящая через M параллельно CD, пересекает отрезок KD в какой-то точке P. Тогда прямая, проходящая через M параллельно CN, пересекает ломаную PDN (стало быть и ломаную KDN). Аналогично и прямая, проходящая через N параллельно MC, пересекает ломаную KBM. Но тогда две указанные прямые должны пересекаться в шестиугольнике $KBMCND$, который содержится в стоугольнике. Значит, точка C хорошая — противоречие.