

Диагностическая работа. Второй (письменный) тур

1. Верно ли, что если произвольное натуральное число умножить на следующее за ним натуральное число, а затем к полученному произведению справа приписать 25, то обязательно получится точный квадрат?

Ответ: Верно.

Решение: Пусть n – натуральное число. Тогда полученное в конце число равно

$$100n(n+1) + 25 = 100n^2 + 100n + 25 = (10n+5)^2.$$

2. Из множества натуральных чисел от 1 до 169 выбрали 84 числа. Докажите, что среди выбранных чисел обязательно есть точный квадрат, либо два числа, которые в сумме дают точный квадрат.

Решение: Если число 169 выбрано, то точный квадрат есть.

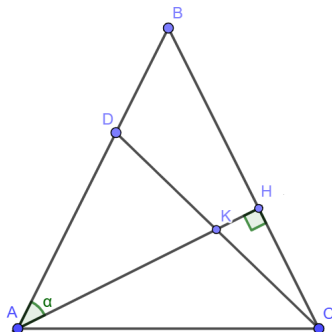
Иначе, разобьём числа на пары: 1 — 168, 2 — 167, ..., 84 — 85. Если два числа выбраны из одной пары, то получается точный квадрат. Всего пар 84, поэтому чтобы сумма двух чисел не была точным квадратом, из каждой пары должно быть выбрано ровно одно число. Но есть пара 25 — 144, где оба числа квадраты.

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена высота AH отмечена и отмечена точка D на стороне AB . Отрезки AH и CD пересекаются в точке K . Оказалось, что $AD = AK$. Найдите $\angle ACD$.

Ответ: 45° .

Решение: Обозначим $\angle DAK = \alpha$. Тогда $\angle B = 90^\circ - \alpha$. $\angle BAC = \angle BCA = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

$\angle ADK = \angle AKD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Тогда $\angle CKH = \angle AKD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ и $\angle KCH = \frac{\alpha}{2}$. Получается, что $\angle ACD = \angle ACB - \angle BCD = 45^\circ + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 45^\circ$.



4. Саша выставил на шахматную доску несколько ладей. Оказалось, что каждая из них бьёт ровно двух других. Артём захотел добавить на доску ещё несколько ладей так, чтобы это свойство выполнялось, но оказалось, что этого нельзя сделать. Какое наименьшее количество ладей мог Саша поставить на доску? (Ладья бьёт по вертикали и горизонтали, не перепрыгивая через другие ладьи.)

Ответ: 9.

Решение: Самая левая среди самых верхних ладей должна бить вниз и направо, то есть, ладьи должны занимать хотя бы по два горизонтальных и вертикальных ряда. При этом если найдутся свободные 2 вертикальных и 2 горизонтальных ряда, то можно поставить 4 ладьи в клетках на пересечении этих двух пар рядов, получив 4 новых ладьи, где каждая ладья бьёт ровно 2 ладьи. Значит по обоим направлениям: вертикаль (столбцы) и горизонталь (строки), — не может быть свободно по два и больше ряда. То есть, по одному из направлений занято хотя бы 7 рядов, а по другому — хотя бы два.

Покажем, что ладей хотя бы 9. Назовём «стенками» стороны клеток на краю доски. Каждая ладья бьёт ровно 2 стенки. При занятых 7 рядах одного направления и 2 рядах другого будет побито не меньше 18 стенок. Тогда нужно минимум $18 : 2 = 9$ ладей.

Пример с 9 ладьями приведён ниже. Пример работает, потому что в левом прямоугольнике 8×7 и в две верхние клетки самого правого столбца исходного квадрата новые ладьи ставить нельзя (тогда какая-то из Сашиных ладей будет бить минимум три ладьи). Значит, Артём может ставить ладьи только внутри прямоугольника 1×6 . Если получится выставить дополнительные ладьи, то среди новых ладей обязательно найдётся самая верхняя, которая будет бить не более одной ладьи, откуда получаем противоречие.

л	л	л	л	л	л	л	
л						л	

5. На сторонах AB , BC , CD и DA квадрата $ABCD$ отметили точки M , N , P , Q соответственно. Отрезки MP и NQ пересекаются в точке X и перпендикулярны. Докажите, что

$$P_{AMXQ} + P_{CPXN} = P_{BNXM} + P_{DQXO}.$$

Решение: Через центр квадрата O проведём отрезки $M'P'$ и $N'Q'$, параллельные данным отрезкам. Для определённости будем считать, что точка X находится внутри или на границе четырёхугольника $M'BN'O$.

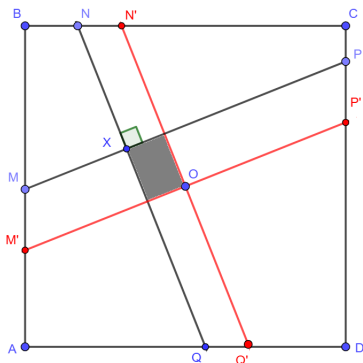
Равенство, которое нужно доказать, можно переписать следующим образом:

$$(AM + AQ) + (CN + CP) = (BM + BN) + (DP + DQ).$$

Так как $M'MPP'$ и $NN'Q'Q$ - параллелограммы, то $MM' = PP'$ и $NN' = QQ'$. Тогда доказываемое равенство можно переписать как:

$$(AM' + AQ') + (CN' + CP') = (BM' + BN') + (DP' + DQ').$$

А оно получается из равенств $AQ' = CN'$, $AM' = CP'$, $BM' = DP'$, $BN' = DQ'$. Первое из них можно получить, например из равенства треугольников AOQ' и CON' . Остальные доказываются аналогично.



6. На большой площади собралось несколько человек. Оказалось, что все парные расстояния между ними различны. Каждый упорядочил для себя всех остальных в порядке от ближайшего до самого дальнего от себя, и послал сообщение k -му по счету человеку в этом списке. Какое наибольшее количество сообщений могло прийти одному и тому же человеку?

Ответ: $5k$.

Решение: Пример. Одна точка в центре правильного пятиугольника и по k точек в его вершинах, потом слегка «пошевелить», чтобы все расстояния стали различны. Аккуратно это можно объяснить так. Фиксируем точку в центре пятиугольника и одну из точек в вершине. Строим к отрезку, соединяющему зафиксированные точки, серединный перпендикуляр и двигаем одну из оставшихся точек так, чтобы она не лежала на этом серединном перпендикуляре, но при этом отодвинулась от исходного положения не более, чем на одну десятую длины стороны пятиугольника. Далее проводим все возможные серединные перпендикуляры к уже зафиксированным точкам и двигаем одну из оставшихся и т.д. В итоге, получится, что центр пятиугольника является k -ой по счету точкой для всех остальных $5k$ точек.

Оценка: Предположим, что человеку, стоящему в точке P_0 пришло $5k + 1$ сообщение от людей, стоящих в точках $P_1, \dots, P_{5k+1}$. Пусть они упорядочены по удаленности от P_0 , где P_1 — самая дальняя, а P_{5k+1} — самая

ближня.

Пусть S_i — круг с центром в P_i , проходящий через P_0 . По предположению, внутри него не более $k - 1$ других P_j . Запустим такой процесс: берем P_1 в качестве точки A_1 , затем удаляем из множества P_i её и всех, кто лежит внутри S_i (итого мы удалили не более k точек), снова берем наиболее удаленную от P_0 из оставшихся P_i в качестве точки A_2 , и т.д. В итоге мы наберём $A_1, \dots, A_6$, причем в каждом треугольнике вида $A_i P_0 A_j$ сторона $A_i A_j$ наибольшая (т.к. при $i < j$ A_j вне S_i , значит $A_i A_j > A_i P_0$, и также $A_i P_0 > A_j P_0$ по изначальной упорядоченности точек), поэтому все углы вида $A_i P_0 A_j$ больше 60° . Но лучи OA_i разбивают угол в 360° на 6 углов, и все эти углы больше 60° , противоречие. (Ещё есть случай, когда среди углов между этими лучами есть больший 180° , но тогда все лучи ведут в одну полуплоскость, и в итоге этот случай разбирается аналогично.)