Степень вхождения простого множителя

Определение. Если натуральное число n кратно p^α, но не кратно $p^{\alpha+1}$, то $\alpha = \nu_p(n)$ — *степень вхождения* простого p в разложение n на простые.

Степень вхождения можно доопределить:

- для отрицательных целых чисел: $\nu_p(-n) = \nu_p(n) \quad$ для $n \in \mathbb{N}$
- для 0: $\nu_p(0) = \infty$
- для рациональной несократимой дроби $q = \frac{m}{n}$: $\nu_p(q) = \nu_p(m) - \nu_p(n)$

Лемма Евклида. Если произведение нескольких чисел делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p.

Лемма. Натуральное число n кратно натуральному числу m тогда и только тогда, когда для любого простого p выполнено $\nu_p(n) \geqslant \nu_p(m)$.

Свойства степеней вхождения:

- $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$
- $\nu_p\left(\dfrac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$
- натуральное число n является точной k-ой степенью тогда и только тогда, когда для любого простого p выполнено $\nu_p(n) \vdots k$.
- $\nu_p(a \pm b) \geqslant \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$, если $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, то достигается равенство
- $\nu_p(\text{НОД}(a_1, \ldots, a_n)) = \min\{\nu_p(a_1), \ldots, \nu_p(a_n)\}$
- $\nu_p(\text{НОК}(a_1, \ldots, a_n)) = \max\{\nu_p(a_1), \ldots, \nu_p(a_n)\}$

---

0. d — общий нечётный делитель чисел C_{n+1}^n, C_{n+2}^n, …, C_{2n}^n. Докажите, что $2^n - 1 \vdots d$.

1. В десятичной записи некоторого целого числа имеется 300 единиц, а остальные — нули. Может ли это число быть точным кубом?

2. Решите в натуральных числах уравнение $8a^4 + 4b^4 + 2c^4 = d^4$.

3. **(а)** На сколько нулей заканчивается число 2025!
(б) При каком наименьшем n число $n!$ делится на 12096^{10}?

4. Докажите, что $abc = (a; b; c) \cdot [ab; bc; ac] = [a; b; c] \cdot (ab; bc; ac)$.

5. Вася выписал на доске 2025 чисел, меньших, чем 2025-е по счёту простое число. Докажите, что какое-то из выписанных чисел является делителем произведения остальных 2024.

6. $y^2z + yz^2 = x^3 + x^2z - 2xz^2$, где x, y, z — взаимно простые в совокупности целые числа. Докажите, что z является кубом целого числа

7. Натуральные числа a и b и натуральное $n > 1$ таковы, что число $\frac{a^n}{b} + \frac{b^n}{a}$ целое. Докажите, что обе дроби целые.

8. В ряд выписаны 2^n натуральных чисел, среди которых не более n различных. Докажите, что можно найти несколько чисел, выписанных подряд, произведение которых — точный квадрат.

9. $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Докажите, что $x - y$ точный квадрат.

10. Докажите, что число $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{1}{2n+1}$ не может быть целым.