

Комбо-площадь

1. В квадрате со стороной 1 находится 51 точка. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть кругом радиуса $1/7$.
2. Точку, лежащую внутри данного квадрата, соединили с его вершинами. Квадрат разился на четыре треугольника. Докажите, что среди этих треугольников найдутся два, отношение площадей которых лежит в диапазоне $[3/5; 5/3]$.
3. На плоскости расположены точки, причём площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не превосходит 1. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.
4. На клетчатой бумаге нарисован треугольник, вершины которого лежат в узлах, а стороны идут не по линиям сетки. Каждая клетка разбита на 4 одинаковых квадратика, левый верхний из которых окрашен в красный цвет, а правый нижний - в синий. Докажите, что в треугольнике красный и синий цвета занимают одинаковую площадь.
5. На плоскости лежат несколько кругов радиуса 1. Среди любых шести из них какие-то два имеют общую точку. Докажите, что суммарная площадь, покрываемая кругами, меньше 100.

6. На плоскости нарисовано 100 единичных отрезков, у любых двух из которых есть общая точка. Докажите, что все отрезки можно накрыть каким-нибудь треугольником периметром меньше 14.
7. Прямоугольник можно разбить линиями, параллельными сторонам, как на 200, так и на 288 равных квадратов. Докажите, что его можно разбить прямыми, параллельными сторонам, и на 392 равных квадрата.
8. Диагонали выпуклого пятиугольника разбивают его на пятиугольник и 10 треугольников. Могут ли восемь из этих треугольников быть равновеликими?