График квадратного трёхчлена

0. Докажите, что если $c(a+b+c)<0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корень.

1. График приведённого квадратного трёхчлена пересекает ось Ox в двух целых точках, расположенных друг от друга на расстоянии 2. Чему равен дискриминант этого трёхчлена?

2. $f(x)=x^2+ax+b$, где $a\neq b$. Оказалось, что $f(a)=f(b)$. Найдите $f(2)$.

3. Прямая пересекает график функции $y=x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс — в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{x_3}$.

4. Известно, что модули корней каждого из двух квадратных трехчленов x^2+ax+b и x^2+cx+d меньше десяти. Могут ли у трёхчлена $x^2+\dfrac{a+c}{2}x+\dfrac{b+d}{2}$ быть корни, модули которых не меньше десяти?

---

5. Длины сторон многоугольника равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1)=f(a_2+\ldots+a_n)$. Докажите, что если A — сумма длин нескольких сторон многоугольника, B — сумма длин остальных его сторон, то $f(A)=f(B)$.

6. Приведённый квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

7. Докажите неравенство $a^2+ab+b^2\geq 3(a+b-1)$.

---

8. Квадратный трёхчлен $f(x)=ax^2+bx+c$, где $a>0$, имеет положительный корень. Докажите, что уравнение $f(f(\ldots(f(x))\ldots))=x$ (2000 итераций) имеет решение.

9. У квадратного трёхчлена $f(x)=x^2+bx+c$ с целыми коэффициентами значение в нуле по модулю не превосходит 800. Также известно, что $f(120)$ — простое число. Докажите, что у него нет целых корней.

10. У квадратного трёхчлена $f(x)$ два действительных корня разность которых не меньше 2025. Докажите, что у уравнения

$$f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+2025)=0$$

тоже два действительных корня.