

Префиксные суммы и принцип Дирихле

Идея. Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ определяет последовательность *префиксных (частичных) сумм*: $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$, при этом последовательность $a_i = s_i - s_{i-1}$ будет *разностной* для s_i .

Идея. Либо у n целых чисел попарно различные остатки от деления на n , либо среди них есть два числа с одинаковым остатком при делении на n .

Лемма. Из n целых чисел можно выбрать группу с суммой, кратной n .

1. В каждой клетке таблицы 10×10 стоит целое число. При каком наибольшем натуральном k можно гарантированно утверждать, что из этой таблицы можно по линиям сетки вырезать связную фигуру (возможно, даже всю таблицу), сумма чисел внутри которой делится на k ?
 2. **Теорема о репдиджитах.** Докажите, что для любого n , не кратного 2 и 5, можно записать число, кратное n , используя только одну цифру.
 3. В ряд выписаны действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$. Докажите, что можно выделить одно или несколько стоящих рядом чисел так, что их сумма будет отличаться от целого числа меньше, чем на 0,001.
 4. В ряд выписали 11 натуральных чисел. Докажите, что найдутся две разные суммы последовательных чисел, кратные 10.
 5. Дано $n - 1$ натуральное число, меньшее n . Для всех $1 \leq k \leq n - 1$ сумма любых k из них не кратна n . Докажите, что они все равны.
 6. В ряд выписаны 20 натуральных чисел. Какое наибольшее число нечётных последовательных сумм может быть среди них?
-
7. Дано простое число $p > 2$. Докажите, что среди любых $p + 1$ целых чисел можно выбрать $p - 1$ число $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ так, чтобы $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (p - 1)a_{p-1}$ делилось на p .
 8. **Лемма Рени.** Докажите, что у последовательности из m целых чисел с суммой 1 ровно один циклический сдвиг, в котором все префиксные суммы положительны.
 9. Дана строчка из 22 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций $+$, $-$, $\cdot$, $:$ и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, кратное 2025? *Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.*