

1.1 Найдите все натуральные x , для которых число $\frac{x^3+7}{x-2}$ является целым.

Ответ: 1,3,5,7,17.

Решение. $\frac{x^3+7}{x-2} = \frac{x^3-8}{x-2} + \frac{15}{x-2} = x^2 + 2x + 4 + \frac{15}{x-2}$. Значит, число $x - 2$ должно быть делителем 15, т.е. $x - 2$ равно 15, 5, 3, 1, -1, -3, -5 или -15. Учитывая, что x натуральное, подходят только первые пять вариантов.

1.2 Найдите все натуральные x , для которых число $\frac{x^3+13}{x-2}$ является целым.

Ответ: 1,3,5,9,23.

1.3 Найдите все натуральные x , для которых число $\frac{x^3+6}{x-3}$ является целым.

Ответ: 2,4,6,14,36.

1.4 Найдите все натуральные x , для которых число $\frac{x^3-12}{x-3}$ является целым.

Ответ: 2,4,6,8,18.

2.1 Точка M лежит внутри треугольника ABC , а точка N - на отрезке CM . Оказалось, что $\angle BMC = 2\angle BAC$, $\angle ANC = 2\angle ABC$. Найдите отрезок AN , если $BM = 17$, $MN = 8$, а $AB = BC$.

Ответ: 25.

Решение. Продлим BM до пересечения с AN в точке K . Пусть $\angle BAC = \angle ACB = \alpha$. Тогда $\angle BMC = 2\alpha$ из условия, $\angle KMN = 180^\circ - \angle BMC = 180^\circ - 2\alpha$. $\angle ABC = 180^\circ - 2\alpha$ из суммы углов треугольника, $\angle ANC = 2\angle ABC = 360^\circ - 4\alpha$, а $\angle KNM = 180^\circ - \angle ANC = 4\alpha - 180^\circ$. По сумме углов треугольника MNK находим $\angle MKN = 180^\circ - 2\alpha$, т.е. $\angle KMN = \angle MKN$, треугольник MKN равнобедренный и $MN = NK$. Далее, углы BMC и AKB равны как смежные к равным. $\angle ABK = 180^\circ - 2\alpha - \angle MBC = \angle KMN - \angle MBC = \angle BCM$. Поэтому треугольники BMC и AKB равны по стороне и двум углам, откуда $AK = BM$. Итого $AN = AK + KN = BM + MN = 25$.

2.2 Точка M лежит внутри треугольника ABC , а точка N - на отрезке CM . Оказалось, что $\angle BMC = 2\angle BAC$, $\angle ANC = 2\angle ABC$. Найдите отрезок AN , если $BM = 15$, $MN = 11$, а $AB = BC$.

Ответ: 26.

2.3 Точка M лежит внутри треугольника ABC , а точка N - на отрезке CM . Оказалось, что $\angle BMC = 2\angle BAC$, $\angle ANC = 2\angle ABC$. Найдите отрезок AN , если $BM = 13$, $MN = 7$, а $AB = BC$.

Ответ: 20.

- 2.4 Точка M лежит внутри треугольника ABC , а точка N - на отрезке CM . Оказалось, что $\angle BMC = 2\angle BAC$, $\angle ANC = 2\angle ABC$. Найдите отрезок AN , если $BM = 19$, $MN = 12$, а $AB = BC$.

Ответ: 31.

- 3.1 В ряд выложено 100 карт рубашкой вниз. Петя и Вася ходят по очереди. Петя ходит первым и за один ход переворачивает любые две соседние карты. Вася ходит вторым и за один ход может перевернуть любые две карты. Вася может остановить игру после очередного своего хода. Какого наибольшего количества карт, лежащих рубашкой вверх, может добиться Вася после своего хода независимо от действий Пети?

Ответ: 52.

Решение. Пронумеруем все карты. Вася каждым ходом, если может, будет переворачивать две четные карты, чтобы они оказались рубашкой вверх. Заметим, что когда-то Вася не сможет так походить, т.к. он каждый ход делает рубашкой вверх две четные карты, а Петя своим ходом переворачивает только одну четную. Рассмотрим этот ход. У нас 49 или 50 четных карт рубашкой вверх, и Вася перевернет карты так, чтобы рубашкой вверх стали все четные и хотя бы одна нечетная. Значит, рубашкой вверх стала хотя бы 51 карта. Но четность карт, повернутых рубашкой вверх - инвариант, поэтому их хотя бы 52. Покажем, что Петя может не дать получить больше. Если перед ходом Пети рубашкой вверх больше 50 карт, то среди них обязательно есть две, лежащие рядом, и Петя перевернет их. Тогда после его хода карт рубашкой вверх не более 50, а после хода Васи - не более 52.

- 3.2 В ряд выложено 140 карт рубашкой вниз. Петя и Вася ходят по очереди. Петя ходит первым и за один ход переворачивает любые две соседние карты. Вася ходит вторым и за один ход может перевернуть любые две карты. Вася может остановить игру после очередного своего хода. Какого наибольшего количества карт, лежащих рубашкой вверх, может добиться Вася после своего хода независимо от действий Пети?

Ответ: 72.

- 3.3 В ряд выложено 80 карт рубашкой вниз. Петя и Вася ходят по очереди. Петя ходит первым и за один ход переворачивает любые две соседние карты. Вася ходит вторым и за один ход может перевернуть любые две карты. Вася может остановить игру после очередного своего хода. Какого наибольшего количества карт, лежащих рубашкой вверх, может добиться Вася после своего хода независимо от действий Пети?

Ответ: 42.

- 3.4 В ряд выложено 120 карт рубашкой вниз. Петя и Вася ходят по очереди. Петя ходит первым и за один ход переворачивает любые две соседние карты. Вася ходит вторым и за один ход может перевернуть любые две карты. Вася может остановить игру после очередного своего хода. Какого наибольшего количества карт, лежащих рубашкой вверх, может добиться Вася после своего хода независимо от действий Пети?

Ответ: 62.

- 4.1 В шесть часов паук начинает двигаться с постоянной скоростью от часовой стрелки против часовой стрелки по краю циферблата. Дойдя до минутной стрелки, паук разворачивается и движется по ободку в противоположном направлении с той же постоянной скоростью, снова достигая минутной стрелки еще через 20 минут. Сколько всего времени потратил паук на весь путь? Ответ дайте в минутах.

Ответ: 26.

Решение. Будем считать расстояние по ободку циферблата в *делениях*, где деление соответствует одной минуте. Примем скорость минутной стрелки за 1 дел/мин. Пусть скорость паука v дел/мин. Изначально расстояние между пауком и минутной стрелкой 30 делений, поэтому они встретятся через $\frac{30}{v+1}$ минут. Чтобы встретиться второй раз, паук должен обогнать стрелку на 60 делений, и на это уйдет $\frac{60}{v-1}$ минут. Значит $\frac{60}{v-1} = 20$, откуда $v = 4$ дел/мин. Итого паук потратил $\frac{60}{v-1} + \frac{30}{v+1} = 26$ минут.

- 4.2 В шесть часов паук начинает двигаться с постоянной скоростью от часовой стрелки против часовой стрелки по краю циферблата. Дойдя до минутной стрелки, паук разворачивается и движется по ободку в противоположном направлении с той же постоянной скоростью, снова достигая минутной стрелки еще через 40 минут. Сколько всего времени потратил паук на весь путь? Ответ дайте в минутах.

Ответ: 47,5.

- 4.3 В шесть часов паук начинает двигаться с постоянной скоростью от часовой стрелки против часовой стрелки по краю циферблата. Дойдя до минутной стрелки, паук разворачивается и движется по ободку в противоположном направлении с той же постоянной скоростью, снова достигая минутной стрелки еще через 15 минут. Сколько всего времени потратил паук на весь путь? Ответ дайте в минутах.

Ответ: 20.

- 4.4 В шесть часов паук начинает двигаться с постоянной скоростью от часовой стрелки против часовой стрелки по краю циферблата. Дойдя до минутной стрелки, паук разворачивается и движется по ободку в противоположном направлении с той же постоянной скоростью, снова достигая минутной стрелки еще через 7,5 минут. Сколько всего времени потратил паук на весь путь? Ответ дайте в минутах.

Ответ: 10,5.

- 5.1 Решите уравнение $mn - \text{НОК}(m, n) = 2530$ в натуральных нечетных числах $m > n$.

Ответ: 253 и 11, 115 и 23.

Решение. Пусть d - НОД чисел m и n . Положим $x = \frac{m}{d}, y = \frac{n}{d}$, тогда $\text{НОК}(m, n) = xyd$ и уравнение переписывается в виде $xyd^2 - xyd = 2530, xyd(d - 1) = 2530$. Нам нужно найти пару делителей d и $d - 1$ в разложении на множители числа $2530 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23$.

Возможные варианты: 23 и 22, 11 и 10, 2 и 1. Последний вариант не подходит, т.к. даст четные m, n . Первые два варианта дают ответы.

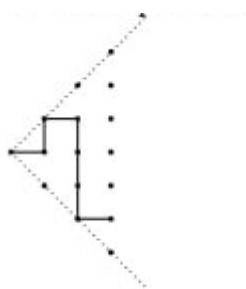
5.2 Решите уравнение $mn - \text{НОК}(m, n) = 2604$ в натуральных числах $m > n$, не кратных 4.

Ответ: 434 и 7, 217 и 14.

6.1 В каждой точке координатной плоскости с целыми неотрицательными координатами находится кочка. Кузнечик сидит на кочке $(0;0)$ и хочет попасть на кочку $(10;0)$. Он может прыгать на другие кочки по диагоналям квадратов сетки 1×1 так, чтобы хотя бы одна из двух его координат увеличивалась. При этом кузнечику нельзя возвращаться на кочку, где он уже был. Сколькими способами кузнечик может совершить свое путешествие?

Ответ: 945.

Решение.



Повернем картинку на 45° . Путь кузнечика соответствует ломаной, звенья которой проходят только по вертикали и горизонтали. Из точки $(0;0)$ мы обязаны сделать ход вправо по горизонтали. Далее у нас есть выбор из трех точек на одной вертикали, до которых мы можем дойти - это точки $(2;0)$, $(1;1)$, $(0;2)$ - всего 3 варианта. Из точки, где мы остановились, нужно снова сделать ход по горизонтали. Теперь есть 5 вариантов, куда можно дойти по вертикали - точки $(4;0)$, $(3;1)$, $(2;2)$, $(1;3)$, $(0;4)$. Таким образом, горизонтальный ход всегда определяется однозначно в зависимости от предыдущих ходов, а для выбора точки, где мы остановимся после вертикальных ходов есть 3, потом 5, потом 7 и т.д. вариантов. Итого ответ $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 945$.

6.2 В каждой точке координатной плоскости с целыми неотрицательными координатами находится кочка. Кузнечик сидит на кочке $(0;0)$ и хочет попасть на кочку $(12;0)$. Он может прыгать на другие кочки по диагоналям квадратов сетки 1×1 так, чтобы хотя бы одна из двух его координат увеличивалась. При этом кузнечику нельзя возвращаться на кочку, где он уже был. Сколькими способами кузнечик может совершить свое путешествие?

Ответ: 10395.

7.1 Вычислите $\frac{(2^4 + \frac{1}{4})(4^4 + \frac{1}{4})(6^4 + \frac{1}{4}) \dots (100^4 + \frac{1}{4})}{(1^4 + \frac{1}{4})(3^4 + \frac{1}{4})(5^4 + \frac{1}{4}) \dots (99^4 + \frac{1}{4})}$.

Ответ: 20201.

Решение. Заметим, что $n^4 + \frac{1}{4} = n^4 + n^2 + \frac{1}{4} - n^2 = (n^2 + \frac{1}{2})^2 - n^2 = (n^2 - n + \frac{1}{2})(n^2 + n + \frac{1}{2})$.
Тогда наше выражение перепишем как $\frac{(2^2 - 2 + \frac{1}{2})(2^2 + 2 + \frac{1}{2})(4^2 - 4 + \frac{1}{2})(4^2 + 4 + \frac{1}{2}) \dots (100^2 - 100 + \frac{1}{2})(100^2 + 100 + \frac{1}{2})}{(1^2 - 1 + \frac{1}{2})(1^2 + 1 + \frac{1}{2})(3^2 - 3 + \frac{1}{2})(3^2 + 3 + \frac{1}{2}) \dots (99^2 - 99 + \frac{1}{2})(99^2 + 99 + \frac{1}{2})}$.

Заметим, что $n^2 - n + \frac{1}{2} = (n-1)^2 + (n-1) + \frac{1}{2}$, поэтому в нашей дроби сокращаются все скобки кроме последней в числителе и первой в знаменателе. Остается $\frac{100^2 + 100 + \frac{1}{2}}{1^2 - 1 + \frac{1}{2}} = 20201$.

7.2 Вычислите $\frac{(2^4 + \frac{1}{4})(4^4 + \frac{1}{4})(6^4 + \frac{1}{4}) \dots (200^4 + \frac{1}{4})}{(1^4 + \frac{1}{4})(3^4 + \frac{1}{4})(5^4 + \frac{1}{4}) \dots (199^4 + \frac{1}{4})}$.

Ответ: 80401.

7.3 Вычислите $\frac{(2^4 + \frac{1}{4})(4^4 + \frac{1}{4})(6^4 + \frac{1}{4}) \dots (300^4 + \frac{1}{4})}{(1^4 + \frac{1}{4})(3^4 + \frac{1}{4})(5^4 + \frac{1}{4}) \dots (299^4 + \frac{1}{4})}$.

Ответ: 180601.

7.4 Вычислите $\frac{(2^4 + \frac{1}{4})(4^4 + \frac{1}{4})(6^4 + \frac{1}{4}) \dots (50^4 + \frac{1}{4})}{(1^4 + \frac{1}{4})(3^4 + \frac{1}{4})(5^4 + \frac{1}{4}) \dots (49^4 + \frac{1}{4})}$.

Ответ: 5101.

- 8 В треугольнике ABC с прямым углом C точка P - внутренняя точка отрезка BC , а точка Q - внутренняя точка отрезка AP . Оказалось, что для некоторого целого числа n выполняется $\angle BQP = \angle PBQ = \angle CAB = n^\circ$. Найдите сумму всех таких n .

Ответ: 525.

Решение. Заметим, что $\angle CAQ = \angle CAB - \angle QAB = \angle PQB - \angle QAB = \angle QBA$. Тогда $\angle CAQ = \angle QBA = 90^\circ - 2n$. Т.к. $\angle QBA > 0$, то $n \leq 44^\circ$. Кроме этого, $\angle CAB > \angle CAQ$, $n > 90^\circ - 2n$, откуда $n \geq 31^\circ$. Нетрудно заметить, что для любого n , $31^\circ \leq n \leq 44^\circ$ можно построить подходящий треугольник. Значит, ответ $31+32+\dots+44=525$.

- 9.1 Пусть $f(n, k)$ - количество делителей числа n , не меньших, чем k . Вычислите $f(1001, 1) + f(1002, 2) + f(1003, 3) + \dots + f(2000, 1000)$.

Ответ: 2000.

Решение. Любое число x , для которого $1001 \leq x \leq 2000$ будет посчитано ровно один раз - в слагаемом $f(x, x-1000)$. Рассмотрим число y , $1 \leq y \leq 1000$. Оно будет посчитано среди $f(1001, 1), f(1002, 2), \dots, f(1000+y, y)$, причем ровно один раз, т.к. среди y подряд идущих чисел $1001, 1002, \dots, 1000+y$ ровно одно делится на y . Итак, каждое число от 1 до 2000 посчитано ровно по одному разу, т.е. ответ - 2000.

- 9.2 Пусть $f(n, k)$ - количество делителей числа n , не меньших, чем k . Вычислите $f(601, 1) + f(602, 2) + f(603, 3) + \dots + f(1200, 600)$.

Ответ: 1200.

- 9.3 Пусть $f(n, k)$ - количество делителей числа n , не меньших, чем k . Вычислите $f(401, 1) + f(402, 2) + f(403, 3) + \dots + f(800, 400)$.

Ответ: 800.

9.4 Пусть $f(n, k)$ - количество делителей числа n , не меньших, чем k . Вычислите $f(801, 1) + f(802, 2) + f(803, 3) + \dots + f(1600, 800)$.

Ответ: 1600.

10.1 Точка M - середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AC = BD = AD$. Оказалось, что угол AMD - прямой. Найдите угол CAD , если угол BDA равен 37° .

Ответ: 23.

Решение. Отложим на луче DM точку K так, что $KM = MD$. Тогда $KCDB$ - параллелограмм, а отрезки KC и BD равны и параллельны. В треугольнике KAD AM - высота и медиана, значит он равнобедренный и $AD = AK$. Тогда $KC = BD = AC = AD = AK$ и треугольник ACK - равносторонний. Т.к. BD и CK параллельны, то угол между диагоналями равен углу KCA , т.е. 60° . Значит, $\angle CAD = 60^\circ - \angle BDA = 23^\circ$.

10.2 Точка M - середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AC = BD = AD$. Оказалось, что угол AMD - прямой. Найдите угол CAD , если угол BDA равен 41° .

Ответ: 19.

10.3 Точка M - середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AC = BD = AD$. Оказалось, что угол AMD - прямой. Найдите угол CAD , если угол BDA равен 34° .

Ответ: 26.

10.4 Точка M - середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AC = BD = AD$. Оказалось, что угол AMD - прямой. Найдите угол CAD , если угол BDA равен 31° .

Ответ: 29.

11.1 Числа, состоящие только из цифр 2 и 5, выписали в ряд в порядке возрастания: 2, 5, 22, 25, 52, 55, 222 и т.д. Какое число стоит на 1000-ом месте?

Ответ: 555525225.

Решение. Всего выписано однозначных чисел 2, двузначных 4, трехзначных 8, четырехзначных 16 и т.д., а т.к. $1000 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 490$, то тысячное число будет 490-ым из девятизначных чисел. Далее, если заменить 2 на 0, а 5 на 1, мы получим, что n -ое девятизначное число из двоек и пятерок соответствует $(n - 1)$ -ому числу в двоичной записи (т.к. число 22222222 соответствует нулю). $489 = 111101001_2$, поэтому тысячное выписанное число это 555525225.

11.2 Числа, состоящие только из цифр 1 и 6, выписали в ряд в порядке возрастания: 1, 6, 11, 16, 61, 66, 111 и т.д. Какое число стоит на 1000-ом месте?

Ответ: 666616116.

11.3 Числа, состоящие только из цифр 3 и 8, выписали в ряд в порядке возрастания: 3, 8, 33, 38, 83, 88, 333 и т.д. Какое число стоит на 1000-ом месте?

Ответ: 888838338.

11.4 Числа, состоящие только из цифр 4 и 9, выписали в ряд в порядке возрастания: 4, 9, 44, 49, 94, 99, 444 и т.д. Какое число стоит на 1000-ом месте?

Ответ: 999949449.

12.1 На плоскости нарисован 100-угольник, не обязательно выпуклый. 97 диагоналей, не пересекающихся во внутренних точках, разбивают его на треугольники. Какое наибольшее количество нарисованных отрезков (сторон и диагоналей 100-угольника) может пересечь во внутренних точках одна и та же прямая?

Ответ: 148.

Решение. 97 диагоналей 100-угольника разбивает его на 98 треугольников. В каждом из треугольников есть хотя бы одна непересеченная сторона, однако некоторые такие стороны могут относиться сразу к двум треугольникам. Значит всего непересеченных отрезков хотя бы $98/2=49$, а пересеченных не больше чем $100+97-49=148$. Такое возможно, если прямая пересекает все стороны 100-угольника (пример существует для невыпуклого многоугольника), а триангуляция устроена так, что любому треугольнику разбиения принадлежит хотя бы одна сторона 100-угольника.

12.2 На плоскости нарисован 120-угольник, не обязательно выпуклый. 117 диагоналей, не пересекающихся во внутренних точках, разбивают его на треугольники. Какое наибольшее количество нарисованных отрезков (сторон и диагоналей 120-угольника) может пересечь во внутренних точках одна и та же прямая?

Ответ: 178.

12.3 На плоскости нарисован 80-угольник, не обязательно выпуклый. 77 диагоналей, не пересекающихся во внутренних точках, разбивают его на треугольники. Какое наибольшее количество нарисованных отрезков (сторон и диагоналей 80-угольника) может пересечь во внутренних точках одна и та же прямая?

Ответ: 118.

12.4 На плоскости нарисован 60-угольник, не обязательно выпуклый. 57 диагоналей, не пересекающихся во внутренних точках, разбивают его на треугольники. Какое наибольшее количество нарисованных отрезков (сторон и диагоналей 60-угольника) может пересечь во внутренних точках одна и та же прямая?

Ответ: 88.