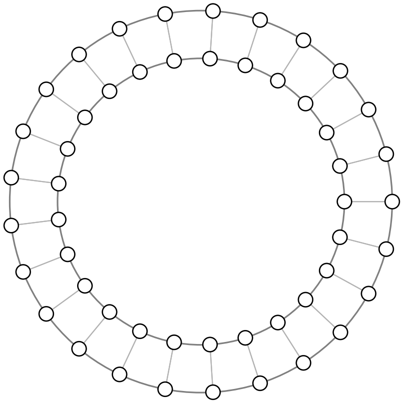
# Отбор в Команду, решения и критерии



**Задача 1.** В пятидесяти кружочках, изображённых на рисунке, расставлены в некотором порядке числа $1, 2, 3, \ldots, 49, 50$ (в каждом кружочке — ровно одно число). Для какого наименьшего натурального числа $d$ можно утверждать, что обязательно найдутся два кружочка, соединённых отрезком, числа в которых отличаются не более чем на $d$?

*Ответ:* 24.

*Решение.* Докажем, что всегда найдутся два кружочка, числа в которых отличаются не более чем на 24.

Предположим противное: пусть все разности между числами в соседних кружочках не меньше 25. Рассмотрим кружочек с числом 26. Легко проверить, что все числа из множества $\{2, 3, \ldots, 50\}$ отличаются от числа 26 не более чем на 24, и потому не могут стоять в соседних кружочках. Получается, что во всех трёх соседних кружочках может стоять только число 1. Но числа в кружочках не могут повторяться. Противоречие.

Осталось предъявить расстановку, в которой все разности между числами в соседних кружочках не меньше 24. Рассмотрим таблицу

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — | 26 | 2 | 28 | 4 | 30 | 6 | … | 48 | 24 | 50 | — |
| — | 1 | 27 | 3 | 29 | 5 | 31 | … | 23 | 49 | 25 | — |

В каждом столбце разность равна 25, а каждой строке разность между любыми двумя соседними элементами равна 24 либо 26 (в том числе разность между первым элементом и последними элементом). Первая строка соответствует внутреннему кольцу, вторая — внешнему. □

*Критерии*

Баллы за части (О) и (П) складываются.

(О) Доказано, что в любой расстановке найдутся два соседних числа с разностью не больше $24$ — **2 балла**.

(О-) Есть идея рассмотреть соседей числа $25$ (или $26$), но нет последующего верного неравенства на $d$ — **1 балл** из 2 баллов за эту часть.

(П) Приведён пример расстановки, в которой все разности между соседями не меньше $24$ — **5 баллов**.

(П-) При построении примера важно проверить, что края прямоугольника $2\times 25$ правильно стыкуются друг с другом; здесь важна нечётность числа $25$. Если эта проверка отсутствует — **4 балла** из 5 баллов за эту часть.

**Задача 2.** Положительные вещественные числа $x$, $y$, $z$ удовлетворяют неравенствам $x+y \geqslant xy$, $y+z \geqslant yz$, $x+z \geqslant xz$. Докажите, что $x+y+z \geqslant \dfrac{3}{4}xyz$.

*Решение.* Оценим выражение $3xyz$ сверху:

$$\begin{aligned} 3xyz = (xy)z + (yz)x + (zx)y \leqslant (x+y)z + (y+z)x + (z+x)y = \\ = 2(xy+yz+zx) \leqslant 2\big((x+y)+(y+z)+(z+x)\big) = 4(x+y+z). \end{aligned}$$

Из этой оценки следует исходное неравенство. □

*Критерии*

При отсутствии решения оценивается следующее продвижение.

($\Sigma$) Получена оценка $x+y+z \geqslant \dfrac{1}{2}(xy+yz+zx)$ или эквивалентная — **1 балл**.

(0) Доказано, что при $x \leqslant y \leqslant z$ выполнено $x, y \leqslant 2$ — **не оценивается**.

**Задача 3.** В каждой клетке горизонтальной полоски $1\times 99$ нарисована одна стрелка, указывающая влево или вправо. Докажите, что найдётся такая стрелка, на которую указывает столько же стрелок, на сколько других стрелок она сама указывает.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ | $\rightarrow$ | $\leftarrow$ | $\leftarrow$ | $\rightarrow$ |

*Пример: на рисунке выше подходит стрелка во второй слева клетке: на неё указывают три другие стрелки и она указывает на три другие стрелки.*

*Решение.* Поскольку число $99$ нечётно, стрелок одного из двух направлений будет нечётное число. Без ограничения общности считаем, что число стрелок «$\rightarrow$» нечётно и их количество обозначим $2k+1$. Пронумеруем исключительно стрелки «$\rightarrow$» слева направо числами от $1$ до $2k-1$. Докажем, что стрелка с номером $k+1$ (средняя среди стрелок «$\rightarrow$») — искомая.

Введём обозначения:
$L_{\rightarrow}$ — число стрелок «$\rightarrow$» слева от выбранной;
$R_{\rightarrow}$ — число стрелок «$\rightarrow$» справа от выбранной;
$L_{\leftarrow}$ — число стрелок «$\leftarrow$» слева от выбранной;
$R_{\leftarrow}$ — число стрелок «$\leftarrow$» справа от выбранной.

Выбранная стрелка указывает на все стрелки справа от неё, и их число равно $R_\to + R_\leftarrow$. На выбранную стрелку указывают стрелки «$\to$» слева от неё и стрелки «$\leftarrow$» справа от неё. Их количество равно $L_\to + R_\leftarrow$.

Осталось проверить, что $R_\to + R_\leftarrow = L_\to + R_\leftarrow$. Это равенство равносильно тому, что $R_\to = L_\to$. Вспомним, что наша стрелка «$\to$» выбрана $(k+1)$-ой из всех $2k+1$ стрелок «$\to$»; из этого следует равенство $R_\to = k = L_\to$. □

*Критерии*

В текстах, не претендующих на полное решение, оцениваются следующие продвижения (не суммируются).

$\to\leftarrow$ Замечено, что для фиксированной стрелки «$\to$» стоящие справа от неё стрелки «$\leftarrow$» дают равный вклад в оба количества (и тем самым остаётся проверить равенство количеств стрелок «$\to$») — **3 балла**.

(С) В качестве искомой стрелки заявлена средняя стрелка среди всех стрелок одного из двух направлений, но обоснование полностью отсутствует — **4 балла**.

(Д) Идея решения через дискретную непрерывность: для каждой стрелки введён счётчик разности количеств стрелок на которые она указывает и стрелок которые на неё указывают и есть попытка вычислить, насколько отличаются счётчики у двух последовательных (не обязательно соседних!) стрелок «$\to$» (в реальности эти счётчики отличаются ровно на $2$) — **2 балла**.

(И) Идея индуктивного решения: есть попытка удалить две клетки со стрелками «$\to$» (желательно, самую левую и самую правую среди этих клеток) и применить предположение индукции — **2 балла**.

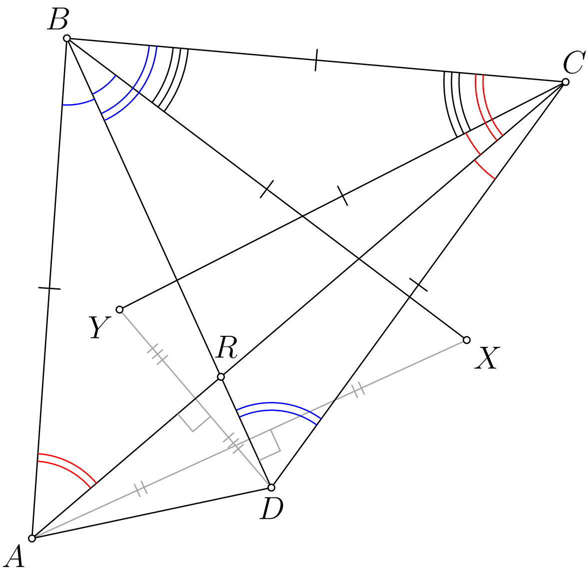
(П) Идея решения с перестановкой клеток: есть попытка поменять местами две соседние клетки с разными стрелками и отследить, как меняется положение искомой стрелки — **2 балла**.

**Задача 4.** На плоскости нарисован выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = CD > AD$. Точка $X$ — отражение точки $A$ относительно прямой $BD$; точка $Y$ — отражение точки $D$ относительно прямой $AC$. Докажите, что $BC \parallel XY$.

*Напомним, что отражением точки $A$ относительно прямой $\ell$ называется такая точка $X$ плоскости, что $\ell$ — это серединный перпендикуляр к отрезку $AX$.*

*Решение.* Обозначим через $R$ точку пересечения диагоналей $AC$ и $BD$.

Раз точки $A$ и $X$ симметричны относительно прямой $BD$, то прямая $BD$ — это серпер к отрезку $AX$ и тем самым $AB = BX$. Аналогично $CD = CY$. Получается, что $BX = AB = BC = CD = CY$.




Докажем, что $\angle XBC = \angle YCB$. Используя равенство симметричных углов и равенство углов при основании равнобедренного треугольника $ABC$, распишем

$$\angle XBC = \angle DBC - \angle XBD = \angle DBC - \angle ABD = \angle BDC - \angle ABD.$$

Аналогично $\angle YCB = \angle CAB - \angle DCA$.

Равенство $\angle XBC = \angle YCB$ равносильно равенству $\angle BDC - \angle ABD = \angle CAB - \angle DCA$, которое переписывается в виде $\angle BDC + \angle DCA = \angle CAB + \angle ABD$. Но обе части последнего равенства равны $\angle ARD$ по свойству внешнего угла в треугольниках $CDR$ и $ABR$. Равенство $\angle XBC = \angle YCB$ доказано.

Треугольники $XBC$ и $YCB$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, равны расстояния от точек $X$ и $Y$ до прямой $BC$, откуда $BC \parallel XY$.

*Замечание.* Условия $CD > AD$ и $AB > AD$ обеспечивают неравенства $\angle DBC > \angle DBA = \angle XBD$ и $\angle ACB > \angle ACD = \angle YCA$. Из этих неравенств следует, что обе точки $X$ и $Y$ находятся в той же полуплоскости относительно прямой $BC$, что и весь четырёхугольник $ABCD$.

□

*Критерии*

Оцениваются следующие продвижения.

(0) Доказано лишь, что $BX = AB = BC = CD = CY$ — **не оценивается**.

(Т) Задача сведена к проверке того, что $XBCY$ — равнобокая трапеция, либо к проверке равенства углов $\angle XBC = \angle YCB$, либо к проверке равенства отрезков $BY = CX$, либо к доказательству равенства треугольников $\triangle BAY = \triangle CDX$ (или ещё к чему-то равносильному) — **2 балла**.

(-0) Счёт в решении углов существенно опирается на верное, но необоснованное расположение точек; в том числе если решается задача с условием $CD < AD$ вместо $CD > AD$ — **баллы не снижаются**.

**Задача 5.** На полянке в лесу по кругу стоят 30 грибочков, пронумерованных числами от 1 до 30. Некоторые пары грибочков дружат (дружба взаимна). За одну операцию разрешается поменять местами любые два стоящих рядом грибочка, не дружащих друг с другом. Цель — расставить все грибочки в порядке возрастания номеров по часовой стрелке. Докажите, что можно для любой начальной расстановки грибочков добиться цели тогда и только тогда, когда выполнено условие: в любой непустой группе грибочков дружб внутри группы меньше, чем грибочков в группе.

*Решение.* Введём граф: вершины — грибочки, дружбы — рёбра.

Для начала докажем, что условие «в любой непустой группе грибочков дружб внутри группы меньше, чем грибочков в группе» равносильно отсутствию циклов в графе.

Если в графе нет циклов, то любая непустая группа его вершин — это объединение нескольких деревьев. Поскольку в каждом дереве число рёбер меньше числа вершин, то и во всей группе число рёбер меньше числа вершин. Получается, что в любой непустой группе число рёбер меньше числа вершин.

Если же в графе есть цикл, выделим группу из всех его вершин этого цикла. Количество рёбер внутри этой группы не меньше, чем, рёбер в цикле; а рёбер в цикле столько же, сколько вершин. Следовательно, если во всех непустых группах число рёбер меньше числа вершин, то циклов в графе быть не может.

Равносильность доказана.

Докажем, что если в графе есть цикл, то не любую расстановку можно упорядочить.

Обозначим вершины цикла $v_1 - v_2 - \ldots - v_k - v_1$. Назовём расстановку, в которой вершины $v_1, \ldots, v_k$ стоят именно в таком порядке при обходе по часовой стрелке, *хорошей* (при этом остальные вершины могут располагаться в промежутках между вершинам $v_1, \ldots, v_k$ как угодно). Легко понять, что любая операция над хорошей расстановкой сохраняет циклический порядок вершин $v_1, \ldots, v_k$, и тем самым из хорошей расстановки может получиться только хорошая расстановка. Поскольку операции обратимы, то из плохой расстановки может получиться только плохая расстановка. Если финальная упорядоченная расстановка хорошая, то никакую плохую расстановку упорядочить не получится; если же финальная расстановка плохая, то не получится упорядочить никакую хорошую.

Осталось доказать, что при отсутствии циклов в графе любую расстановку можно упорядочить.

Докажем индукцией по $n$, что если в графе на $n \geqslant 2$ грибочках нет циклов, то можно упорядочить любую расстановку. База $n = 2$ тривиальна: любая расстановка уже упорядочена.

Шаг индукции $(n-1) \to n$. Если в графе нет рёбер, то пары вершин можно менять друг с другом без ограничений и утверждение очевидно; в противном случае выделим в одном из деревьев висячую вершину $v_n$. Заметим, что вершину $v_n$ всегда можно поменять с одной из двух соседних вершин. Временно удалим вершину $v_n$ и рассмотрим последовательность обменов, упорядочивающую остальные вершины $v_1, \dots, v_{n-1}$. Эта последовательность существует по предположению индукции, ведь условие ацикличности в подграфе на вершинах $v_1, \dots, v_{n-1}$ всё ещё выполнено.

Вернём обратно вершину $v_n$ и попытаемся выполнить эту же последовательность обменов. Если последовательность предписывает поменять местами две рядом стоящие вершины $v_i$ и $v_j$, то просто поменяем их друг с другом. Если же очередную операцию обмена вершин $v_i$ и $v_j$ мешает сделать стоящая между ними вершина $v_n$, поменяем её с одним из соседей и сразу после поменяем вершины $v_i$ и $v_j$ друг с другом.

Такими действиями мы упорядочим вершины $v_1, \dots, v_{n-1}$; после этого останется перетащить вершину $v_n$ на своё место по той дуге круга, в которой нет смежной с ней вершины. Переход индукции доказан. $\square$

*Критерии*

Баллы за части (Д), ($\Rightarrow$), ($\Leftarrow$) суммируются.

(Д) Замечена равносильность условия на группы грибочков и условия отсутствия циклов в графе — **1 балл**.

($\Rightarrow$) Доказано, что при наличии цикла не из любой расстановки можно получить искомую – **2 балла**.

($\Leftarrow$) Доказано, что при отсутствии циклов из любой расстановки можно получить искомую – **4 балла**.

($\Leftarrow /2$) В тексте есть идея индуктивного решения, но полной формальной реализации этого решения нет – **2 балла** из 4 баллов за часть ($\Leftarrow$).

**Задача 6.** Натуральное число $k > 1$ назовём *интересным*, если для любых натуральных чисел $a$ и $b$ из делимости $ka + b$ на $kb + a$ следует делимость $a$ на $b$. Найдите все интересные числа.

*Ответ:* 2, 3, 5.

*Решение.* Делимость $ka + b$ на $kb + a$ равносильна делимости числа

$$k(kb + a) - (ka + b) = (k^2 - 1)b$$

на $kb + a$.

Докажем, что все числа $k \geqslant 6$ — неинтересные. Выберем $b = k - 2$, $a = 2k - 1$. Тогда

$$kb + a = k(k - 2) + (2k - 1) = k^2 - 1,$$

то есть $(k^2 - 1)b$ делится на $kb + a$, в то время как

$$\frac{a}{b} = \frac{2k - 1}{k - 2} = 2 + \frac{3}{k - 2} \notin \mathbb{Z},$$

поскольку при $k \geqslant 6$ выполнено $0 < \dfrac{3}{k - 2} < 1$.

Значение $k = 4$ тоже неинтересное, поскольку $\dfrac{3}{k - 2} = \dfrac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Докажем, что значения $k = 2, 3, 5$ — интересные.

(1) $k = 2$. Заметим, что

$$\frac{(k^2-1)b}{kb+a} = \frac{3b}{2b+a} < \frac{3}{2} < 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3b}{2b+a} \in (0, 2).$$

В этом случае делимость $3b$ на $2b + a$ возможна только в случае равенства $\frac{3b}{2b+a} = 1$. Но тогда $a = b$, то есть $a$ делится на $b$.

(2) $k = 3$. Тогда

$$\frac{(k^2-1)b}{kb+a} = \frac{8b}{3b+a} < \frac{8}{3} < 3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{8b}{3b+a} \in (0, 3).$$

Если $8b$ делится на $3b + a$, то либо $\frac{8b}{3b+a} = 1$ и тогда $a = 5b$, либо $\frac{8b}{3b+a} = 2$ и тогда $a = b$. В обоих случаях $a$ делится на $b$.

(3) $k = 5$. Имеем

$$\frac{(k^2-1)b}{kb+a} = \frac{24b}{5b+a} < \frac{24}{5} < 5 \quad \Longrightarrow \quad \frac{24b}{5b+a} \in (0, 5).$$

Если $24b$ делится на $5b + a$, то либо $\frac{24b}{5b+a} = 1$ и тогда $a = 19b$, либо $\frac{24b}{5b+a} = 2$ и тогда $a = 7b$, либо $\frac{24b}{5b+a} = 3$ и тогда $a = 3b$, либо $\frac{24b}{5b+a} = 4$ и тогда $a = b$. Во всех случаях $a$ делится на $b$. $\square$

*Критерии*

Баллы за части (Д), (П), (О) суммируются.

(Д) Делимость $kb + a \mid ka + b$ приведена к виду $kb + a \mid b(k^2 - 1)$ — **1 балл**.

(П) Доказано, что все три числа $2, 3, 5$ интересные — **2 балла**.

(П-) Доказана интересность хотя бы одного числа из $\{2, 3, 5\}$ — **1 балл** из 2 баллов за часть (П).

(О) Доказано, что все числа $k \geqslant 6$ неинтересные — **4 балла**.

(И) Доказано, что число $k$ является интересным тогда и только тогда, когда $\forall d \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ число $k^2 - 1$ делится на $d$ (или какой-то другой признак неинтересности чисел, не зависящий от $a$ и $b$) – **2 балла** из 4 баллов за часть (О).