

Разнойбой

1. Докажите, что у уравнения $x^2 + y^2 = 3(u^2 + v^2)$ нет решений в натуральных числах.
2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD отмечена середина E стороны BC . Оказалось, что $\angle BAE + \angle EDC = 90^\circ$, $AB = 7$, $CD = 10$. Найдите длину отрезка AD .
3. Докажите, что произведение любых n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.
4. За круглым столом сидит чётное число людей. Количество денег у любых двух соседей отличается не более чем на 100 руб. Докажите, что найдутся два человека, сидящих напротив друг друга, у которых количество денег также отличается не более чем на 100 руб.
5. В кучке n камней, двое игроков играют в игру. Они по очереди берут из кучки 1, 2 или 3 камня, причем нельзя брать столько же камней, сколько только что взял соперник. Кто не может сделать ход — проиграл. Для каждого n определите, кто выигрывает при правильной игре.
6. Докажите, что для любого чётного n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323.
7. Два кота делят огромную цепочку из 100 сосисок с мышатиной и 200 сосисок с крысятиной. Они хотят разделить её так, чтобы каждому досталось ровно по половине сосисок каждого вида. Какого минимального числа разрезов им гарантированно хватит?
8. Докажите, что если число $x + \frac{1}{x}$ — целое, то число $x^n + \frac{1}{x^n}$ — тоже целое.
9. На плоскости есть n синих и n красных точек. Докажите, что можно разбить все точки на пары и соединить точки в парах отрезками так, чтобы отрезки не пересекались и концы каждого отрезка были бы разных цветов.