Программа годового зачёта за 7 класс

В каждом теоретическом вопросе нужно дать определения всем перечисленным терминам, а также сформулировать и доказать все упомянутые утверждения.

Теоретические вопросы по комбинаторике

1. Выигрышные и проигрышные позиции. Взгляд на игру как на ориентированный граф всех позиций. В любой ациклической игре с конечным числом позиций все позиции всегда можно разметить как выигрышные и проигрышные (а без условия ацикличности — не всегда). Передача хода; описание вершин графа позиций игры, в которых возможна передача хода.

2. Число сочетаний C_n^k. Определение, интерпретация в виде числа траекторий хромой ладьи. Явная формула, треугольник Паскаля, бином Ньютона. Основные формулы суммирования C_n^k:
$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n$,
$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n$,
$C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + C_{n+3}^3 + \ldots + C_{n+k}^k$
$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^3)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$.

3. Деревья. Определение, наличие висячих вершин в дереве, количество рёбер. Построение остовного дерева двумя способами: последовательным удалением рёбер из циклов и последовательным выбором рёбер между компонентами. Эквивалентные определения дерева: минимальный связный граф и максимальный ациклический граф.

4. Подвешивание графа за вершину, разбиение вершин на уровни, рёбра между уровнями и внутри уровней. Два способа построения уровней: индуктивный и через расстояние до корня. Критерий двудольности графа.

5. Периодичность, зацикливание. Любой маршрут в ориентированном графе с исходящей степенью 1 в каждой вершине зацикливается. Достаточное условие на отсутствие предпериода. Почему последовательность Фибоначчи, взятая по модулю n, периодична и не имеет предпериода?

6. Формула включений-исключений.

Ключевые задачи по комбинаторике

1. **(а)** На прямой выбрано несколько отрезков так, что любые два из них имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку. **(б)** На прямой дано $2n+1$ отрезков. Известно, что каждый пересекается не меньше чем с n из оставшихся. Докажите, что найдется отрезок, который пересекается со всеми.

2. Доска 20×20 разрезана на доминошки. За одну операцию разрешается вынуть две доминошки, образующие квадрат 2×2 (если такие есть), и вставить их обратно, повернув на $90°$. Докажите, что такими операциями можно из любого разрезания на доминошки получить любое другое.

3. Имеется 99! молекул. Двое по очереди за один ход съедают не меньше одной, но не больше 1% от текущего количества молекул. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

4. В вершинах n-угольника расставлены m фишек ($m > n > 2$). За ход можно выбрать какую-нибудь вершину, в которой хотя бы две фишки, забрать из неё две фишки и добавить по одной фишке к её соседним вершинам. Докажите, что если через несколько ходов в каждой вершине будет находиться столько же фишек, сколько в ней было изначально, то количество совершённых ходов будет кратно n.

5. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, n$ в некотором порядке. За одно действие разрешается поменять два числа на доске местами. За какое наименьшее число действий можно расставить числа на доске: **(а)** по возрастанию, действие можно применять только к соседним числам; **(б)** по возрастанию, действие можно применять к любым двум числам.

6. На столе лежат n карт с номерами от 1 до n. Два зрителя по очереди берут по одной карте. Затем помощник фокусника берёт одну карту себе. После чего приходит фокусник, смотрит на оставшиеся номера и говорит, у какого зрителя какой номер карты. Могут ли фокусник и помощник договориться так, чтобы фокус всегда удавался при **(а)** $n = 7$; **(б)** $n = 8$?

7. Мистер кузнечик сидит на плоскости и умеет прыгать на расстояние 1 в четырёх направлениях: вверх, влево, вниз, вправо. Сколькими способами он может выполнить серию из $2n$ прыжков и вернуться в исходную точку?

8. В чемпионате по футболу участвуют $n > 1$ команд. Требуется составить расписание игр так, чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось играть две игры за день. Докажите, что
(а) если n нечётно, то можно провести чемпионат за n дней;
(б) если n чётно, то можно провести чемпионат за $n-1$ день.

9. На доску записывают пары целых чисел. Изначально на доске записана единственная пара $(1, 2)$. Разрешается дописывать на доску новые пары по следующим правилам:
- если есть пара (a, b), можно дописать $(-a, -b)$;
- если есть пары (a, b) и (c, d), можно дописать $(a+c, b+d)$;
- если есть пара (a, b), можно дописать $(-b, a+b)$.

Могла ли через некоторое время на доске получиться пара $(2022, 2023)$? Порядок чисел в паре важен; например, пары $(1, 2)$ и $(2, 1)$ — различные.

10. На бесконечной клетчатой плоскости часть клеток закрасили. Оказалось, что в любом клетчатом прямоугольнике $m \times n$ (или $n \times m$) есть ровно одна закрашенная клетка. При каких m и n это возможно?

11. В стране 2025 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от каждого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать во всех городах, совершив не более 4046 перелётов.

12. В графе 2025 вершин, причём степень каждой не менее трёх. Докажите, что в графе есть цикл длины не более 20.

13. Дан белый квадрат 10×10. За ход можно выбрать 4 белые клетки на пересечении двух строк и двух столбцов и одну из них покрасить. Какое наибольшее количество клеток можно покрасить?

14. В Тридесятом Королевстве любая дорога соединяет два замка и у каждого замка сходятся ровно три дороги. Рыцарь выехал из своего замка и по очереди поворачивает в каждом посещённом замке то направо, то налево. Докажите, что рыцарь рано или поздно вернётся в изначальный замок.

15. Найдите значение суммы

$$n^n - C_n^1(n-1)^n + C_n^2(n-2)^n - C_n^3(n-3)^n + \ldots + (-1)^n C_n^n (n-n)^n.$$

16. На табличках, лежащих в ряд, сделаны надписи «1», «2», …, «10000», «10001». Двое по очереди убирают из ряда любые девять табличек. Когда в итоге останется две таблички, первый получает количество рублей, равное разности чисел на оставшихся табличках. Какое наибольшее количество денег точно сможет получить первый?

17. Витя рисует пейзаж «Река»: картина 8×8 пикселей, каждый пиксель одного из двух цветов: синий или оранжевый. Пейзаж удачный, если на картине есть подобие «реки»: последовательность граничащих друг с другом по стороне синих клеток, среди которых есть клетка в самом левом и в самом правом столбце. Докажите, что среди всевозможных 2^{64} пейзажей удачных меньше половины.

18. Круг разрезан на $2n$ равных секторов, все секторы раскрашены в некотором порядке в два цвета. Получилось n красных секторов и n синих. Все красные секторы пронумерованы числами от 1 до n по часовой стрелке. Все синие секторы пронумерованы числами от 1 до n против часовой стрелки. Докажите, что можно выделить полукруг, в котором все числа от 1 до n встречаются ровно по одному разу.

Теоретические вопросы по алгебре и ТЧ

1. Системы счисления. Существование и единственность представления натурального числа в k-ичной системе. Два алгоритма поиска k-ичного представления числа: (1) жадный от старших цифр к младшим и (2) с помощью остатков по модулю k от младших цифр к старшим.

2. Основная теорема арифметики для натуральных чисел (без доказательства). Описание делителей числа, а также НОД и НОК двух чисел в терминах степеней вхождения простых множителей. Формула для количества делителей. Стандартные тождества с НОДами и НОКами, такие как $\text{НОД}(m,n) \cdot \text{НОК}(m,n) = m \cdot n$ и

$$\text{НОД}(a,b,c) \cdot \text{НОК}(ab,bc,ca) = abc = \text{НОК}(a,b,c) \cdot \text{НОД}(ab,bc,ca).$$

3. Числа Фибоначчи. Основная комбинаторная интерпретация: задача про лягушку, прыгающую на 1 или 2 клетки. Формулы суммирования F_k:
$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \ldots + F_{2k-1}$;
$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots + F_k$;
$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \ldots + F_k^2$.
Чему равен $\text{НОД}(F_m, F_n)$?

4. Полная система вычетов по модулю n. При каком условии на натуральные числа a и n полная система вычетов, домноженная на a, остаётся полной системой вычетов? Определение обратных остатков. У каких остатков существует обратный остаток? Теорема Вильсона. Малая теорема Ферма.

Ключевые задачи по алгебре и ТЧ

1. На доске выписано несколько различных восьмизначных чисел, запись которых состоит только из двоек и троек. Докажите, что все эти числа имеют различные остатки от деления на 256.

2. Известно, что клетчатый квадрат можно разрезать на n одинаковых фигурок из k клеток. Докажите, что его можно разрезать и на k одинаковых фигурок из n клеток.

3. Сумма цифр числа n равна 50. Какое наибольшее значение может принимать сумма цифр числа n^3?

4. В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешается перелить ровно столько воды, сколько в нём уже содержится, из любого другого сосуда. Каждый из сосудов может вместить всю имеющуюся в них воду. Докажите, что можно несколькими переливаниями освободить один из сосудов.

5. Докажите, что среди любых n натуральных чисел можно выбрать несколько так, чтобы сумма выбранных делилась на n.

6. Какое наибольшее количество из натуральных чисел, не превосходящих $2n$, можно выбрать так, чтобы ни одно из них не делилось на другое?

7. Докажите, что каждое рациональное число $r \in (0,1)$ можно представить в виде суммы нескольких различных египетских дробей (то есть дробей вида $\frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$). *Нужно рассказать два различных решения этой задачи.*

8. Докажите, что ни при каком натуральном n число

$$(1^4+1^2+1)(2^4+2^2+1)\ldots(n^4+n^2+1)$$

не является точным квадратом.

9. Натуральные числа a, b, c, d удовлетворяют соотношению $ab = cd$. Докажите, что число $a+b+c+d$ — составное.
В этой задаче нужно рассказать два решения: через разбиения множества простых делителей числа $N = ab$ и с помощью подстановки $d = \frac{ab}{c}$.

10. Докажите, что число $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ не является целым ни при каком натуральном $n > 1$.

11. Докажите для натурального $a > 1$, что если число $(2a+1)^{2025} - a(a+2)^{2025}$ — положительное, то оно составное.

12. Пусть $p > 3$ — простое число. Рациональное число

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

представили в виде несократимой дроби. Докажите, что числитель этой дроби делится на p.

13. Докажите для натуральных чисел m, n и $a > 1$, что

$$\text{НОД}(a^m-1, a^n-1) = a^{\text{НОД}(m,n)} - 1.$$

14. Назовём натуральное число *ровным*, если в его записи все цифры одинаковы (например: $4, 111, 999999$). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n+1$ ровных чисел.

15. Докажите, что сумма квадратов делителей натурального числа, отличных от него самого, меньше его квадрата.

16. Вещественное число $x \geqslant 1$ таково, что $[x^2], [x^3], [x^4]$ — точные квадраты. Докажите, что $[x]$ тоже является точным квадратом.

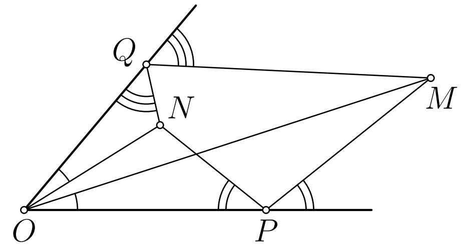
Ключевые задачи по геометрии

1. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена такая точка K, что $CK = DK$ и $\angle CKD = 150°$. Докажите, что $AK = AB$.

2. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ все пять углов при вершинах равны. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам BC и DE пересекаются на биссектрисе угла A.

3. Точки X и Y — основания перпендикуляров из вершины A, опущенных на биссектрисы углов при вершинах B и C треугольника ABC. Докажите, что $XY \parallel BC$.

4. Докажите, что на картинке ниже длины ломаных MPN и MQN равны.



5. В треугольнике ABC угол B равен $60°$. На лучах AB и CB отложены отрезки AX и CY, равные стороне AC. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

6. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка X. Докажите, что четыре прямые проведённые через вершины A, B, C, D квадрата параллельно прямым XC, XD, XA, XB соответственно, пересекаются в одной точке.

7. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AB = BC$, $\angle ABC = 90°$. На сторонах CD и DA выбраны точки E и F соответственно так, что $\angle FBE = 75°$. Докажите, что $AB + AF + CE > EF$.

8. Один из углов треугольника равен $120°$. Докажите, что треугольник, образованный основаниями биссектрис данного, прямоугольный.