

Целая и дробная часть

Определение. Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x . Дробной частью $\{x\}$ называется число $x - [x]$.

Свойства:

- $[x] \leq x < [x] + 1$;
- $0 \leq \{x\} < 1$;
- $[x + y] - 1 \leq [x] + [y] \leq [x + y]$;
- если $[x] = [y]$, то $|x - y| < 1$.

1. Решите уравнение $[x] \cdot \{x\} = x^2$.

2. Докажите, что для любого $x \geq 1$ верно равенство $[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = [\sqrt[4]{x}]$.

3. (а) Докажите, что $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$.

(б) Докажите, что

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

4. Найдите количество решений уравнения $\{(x+1)^3\} = x^3$.

5. Для натурального n докажите, что

$$\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \dots + \{\sqrt{n^2}\} \leq \frac{n^2 - 1}{2}.$$

6. Сумма дробных частей нескольких положительных чисел равна целой части их произведения. Докажите, что дробная часть суммы этих чисел равна произведению их целых частей.

7. Вещественное число $x \geq 1$ таково, что $[x^2], [x^3], [x^4]$ — точные квадраты. Докажите, что $[x]$ тоже является точным квадратом.

8. Докажите, что для любого натурального n и вещественного $x > 1$ выполняется неравенство

$$\{x\} + \{2x\} + \dots + \{nx\} \leq \frac{nx}{2}.$$