Делители

1. У числа N^2 ровно 99 натуральных делителей. Сколько натуральных делителей может быть у числа N?

2. Докажите, что произведение всех делителей точного квадрата — это нечётная степень какого-то натурального числа (отличная от первой).

3. Существует ли натуральное число, у которого нечётное количество чётных натуральных делителей и чётное количество нечётных?

4. В ряд в порядке возрастания выписаны все делители числа n:
$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_m = n.$$
Оказалось, что рядом с каждым чётным делителем стоит рядом (слева или справа) некоторый нечётный делитель. Докажите, что рядом с каждым нечётным делителем стоит некоторый чётный делитель.

5. У каждого из двух натуральных чисел m и n нашли произведение всех его натуральных делителей (включая само число). Полученные произведения оказались равными. Докажите, что $m = n$.

6. В ряд выписаны все натуральные делители числа $4k$:
$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_m = 4k.$$
Докажите, что найдётся такое $i \in \{2, 3, 4, \ldots, m\}$, что $d_i - d_{i-1} = 2$.

7. Натуральное число $n > 1$ таково, что для любого натурального делителя d числа n число $n^2 + n + 1$ делится на $d^2 + d + 1$. Докажите, что n — или простое число, или квадрат простого числа.

8. Докажите, что сумма квадратов делителей натурального числа, отличных от него самого, меньше его квадрата.