Дискретная непрерывность

Мысль. Предположим, что некоторая величина (1) принимает только целые значения, (2) в начале процесса принимает значение a, (3) в конце процесса принимает значение b, (4) за каждый ход меняется не более чем на 1. Тогда величина в ходе процесса принимает все целые значения из отрезка $[a, b]$.

1. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

2. На уроке физкультуры в ряд стоят 30 детей: 15 мальчиков и 15 девочек. Докажите, что можно выделить 10 подряд стоящих школьников, среди которых будет поровну мальчиков и девочек.

3. **(а)** На плоскости отмечены 100 точек, причём никакие три отмеченные точки не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести такую прямую, что по разные стороны от неё будет по 50 отмеченных точек.
(б) На плоскости отмечены 100 чёрных точек и 1 красная точка, причём никакие три отмеченные точки не лежат на одной прямой. Докажите, что через красную точку можно провести такую прямую, что по разные стороны от неё будет по 50 чёрных точек.

4. В квадрате 10×10 отмечены 30 клеток. Докажите, что квадрат можно разрезать на две равные связные клетчатые фигуры, в которых поровну отмеченных клеток.

5. Грани восьми кубиков $1 \times 1 \times 1$ раскрашены в чёрный и белый цвета так, что суммарно чёрных граней столько же, сколько белых. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб $2 \times 2 \times 2$ так, чтобы на поверхности этого куба чёрных и белых квадратиков 1×1 было поровну.

6. Круг разрезан на $2n$ равных секторов, все секторы раскрашены в некотором порядке в два цвета. Получилось n красных секторов и n синих. Все красные секторы пронумерованы числами от 1 до n по часовой стрелке. Все синие секторы пронумерованы числами от 1 до n против часовой стрелки. Докажите, что можно выделить полукруг, в котором все числа от 1 до n встречаются ровно по одному разу.

7. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовём пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.