

Степени вхождения

1. Сколькими нулями оканчивается число $100!$?
2. Решите в натуральных числах уравнение $2^x - 2^y - 2^z = 2^7 \cdot 59$.
3. Даны три попарно различных натуральных числа a, b, c . Докажите, что число $(a + b)(b + c)(c + a)$ не может быть степенью двойки.
4. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа, а Вася — сумму всех чётных делителей этого числа. Может ли произведение этих двух чисел быть точным квадратом?
5. Докажите, что число $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ не является целым ни при каком натуральном $n > 1$.
6. Найдите наибольшую степень двойки, на которую делится число

$$(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) \cdot \dots \cdot (2n - 1) \cdot (2n).$$

7. Про натуральное число n известно, что числа n и $n + 2$ представимы в виде суммы двух различных натуральных степеней двойки. Докажите, что тогда одно из чисел n , $n + 2$ представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.
8. По кругу стоят 10^{2026} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{2026} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?